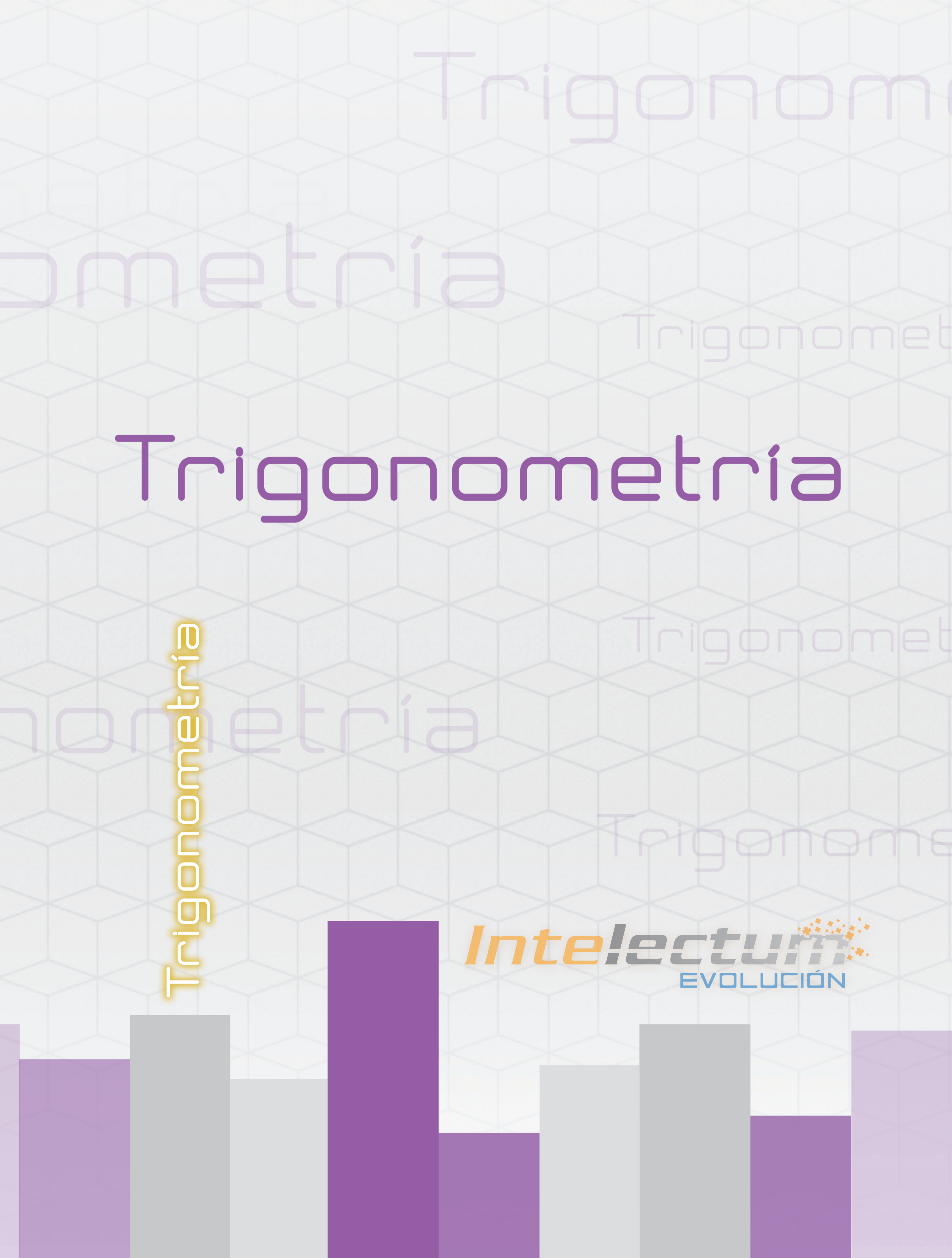

Trigonometría
Trigonometría
Intelectum
EVOLUCIÓN





Unidad 1

- Define cada uno de los elementos del ángulo trigonométrico.
- Identifica los ángulos negativos y positivos.
- Representa gráficamente un ángulo trigonométrico.
- Analiza las conversiones a otros sistemas angulares.
- Reconoce la equivalencia entre los distintos sistemas angulares (sexagesimal, centesimal y radial).
- Utiliza la fórmula de conversión para las conversiones de ángulos a otros sistemas.
- Utiliza correctamente las notaciones al realizar las conversiones.
- Analiza la longitud de arco de una circunferencia.
- Calcula la longitud del arco de una circunferencia.
- Representa gráficamente un arco dentro de una circunferencia.
- Demuestra las razones trigonométricas relacionándolas con un triángulo rectángulo.

Unidad 2

- Denota e identifica correctamente un sector circular.
- Analiza y comprende las relaciones usadas para el cálculo de sectores circulares.
- Aplica las distintas relaciones estudiadas para calcular el área de un sector circular identificando correctamente sus elementos.
- Determina el área de trapecios circulares utilizando las fórmulas dadas.
- Evalúa y comprende las distintas razones trigonométricas.
- Identifica las razones trigonométricas recíprocas y las de ángulos complementarios.
- Utiliza las propiedades de las razones trigonométricas para la resolución de problemas.
- Calcula el valor de cada una de las razones trigonométrica de un ángulo agudo.
- Aplica las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.

LOS AVIONES

El transporte aéreo de hoy en día exige un riguroso control de las aeronaves al momento del despegue y aterrizaje. Para ese tipo de controles es necesario conocer la ubicación exacta respecto al suelo terrestre. La ingeniería aeronáutica se ha valido de conceptos de ángulos de elevación y depresión para guiar a los pilotos en el momento del despegue y/o aterrizaje. Desde la torre de control de los aeropuertos se mantiene informado constantemente al piloto sobre la posición de la nave y el ángulo que debe adoptar para una correcta maniobra.

Contenido:

Unidad 1

- Ángulo trigonométrico.
- Sistemas de medición angular.
- Longitud de arco.

Unidad 2

- Área del sector circular.
- Razones trigonométricas de ángulos agudos.
- Propiedades de las razones trigonométricas.

Unidad 3

- Triángulos rectángulos notables.
- Razones trigonométricas de ángulos notables.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Ángulos verticales.

Unidad 4

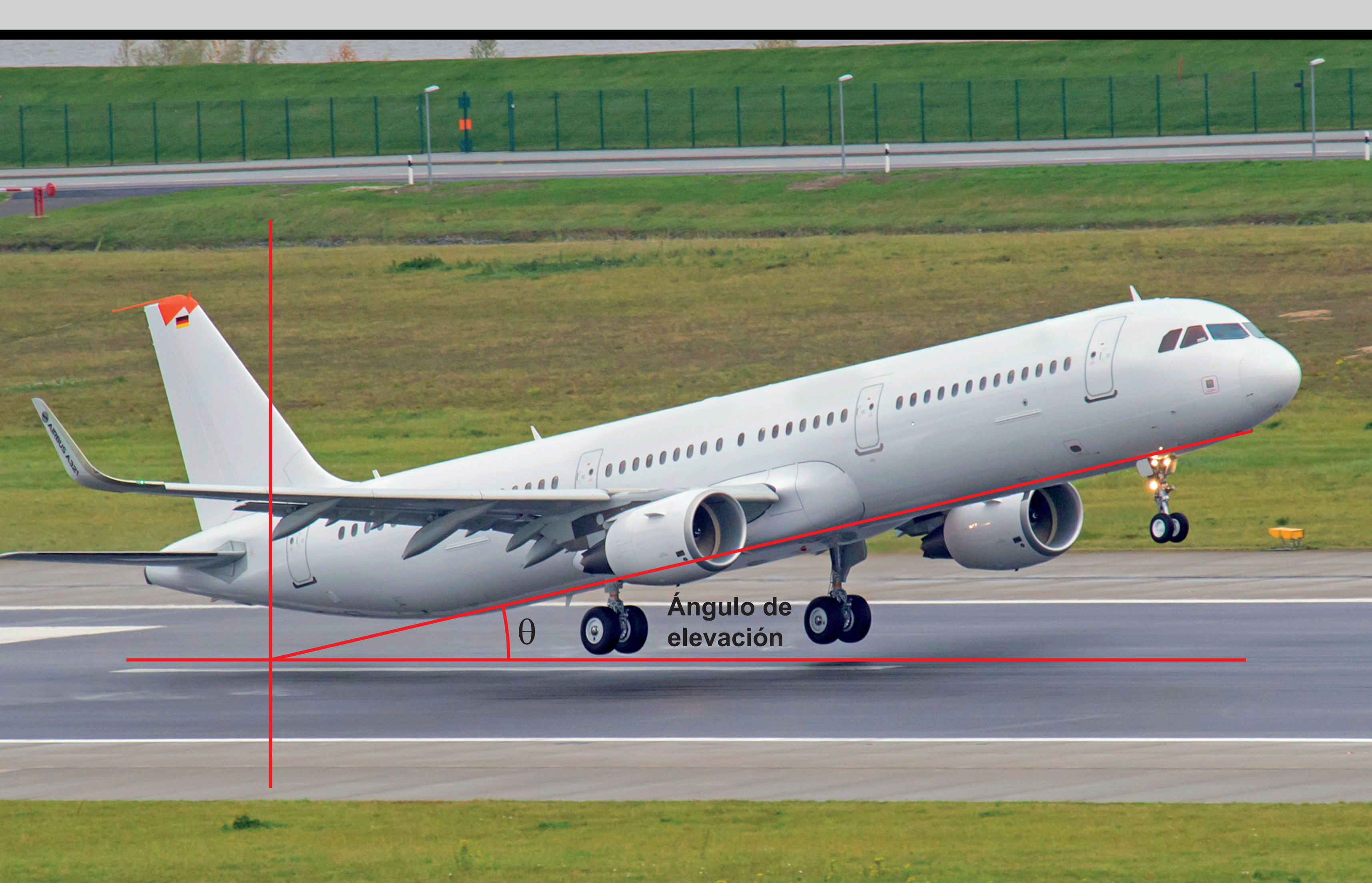
- Sistema de coordenadas cartesianas.
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal.
- Reducción al primer cuadrante.
- Sistema métrico decimal.

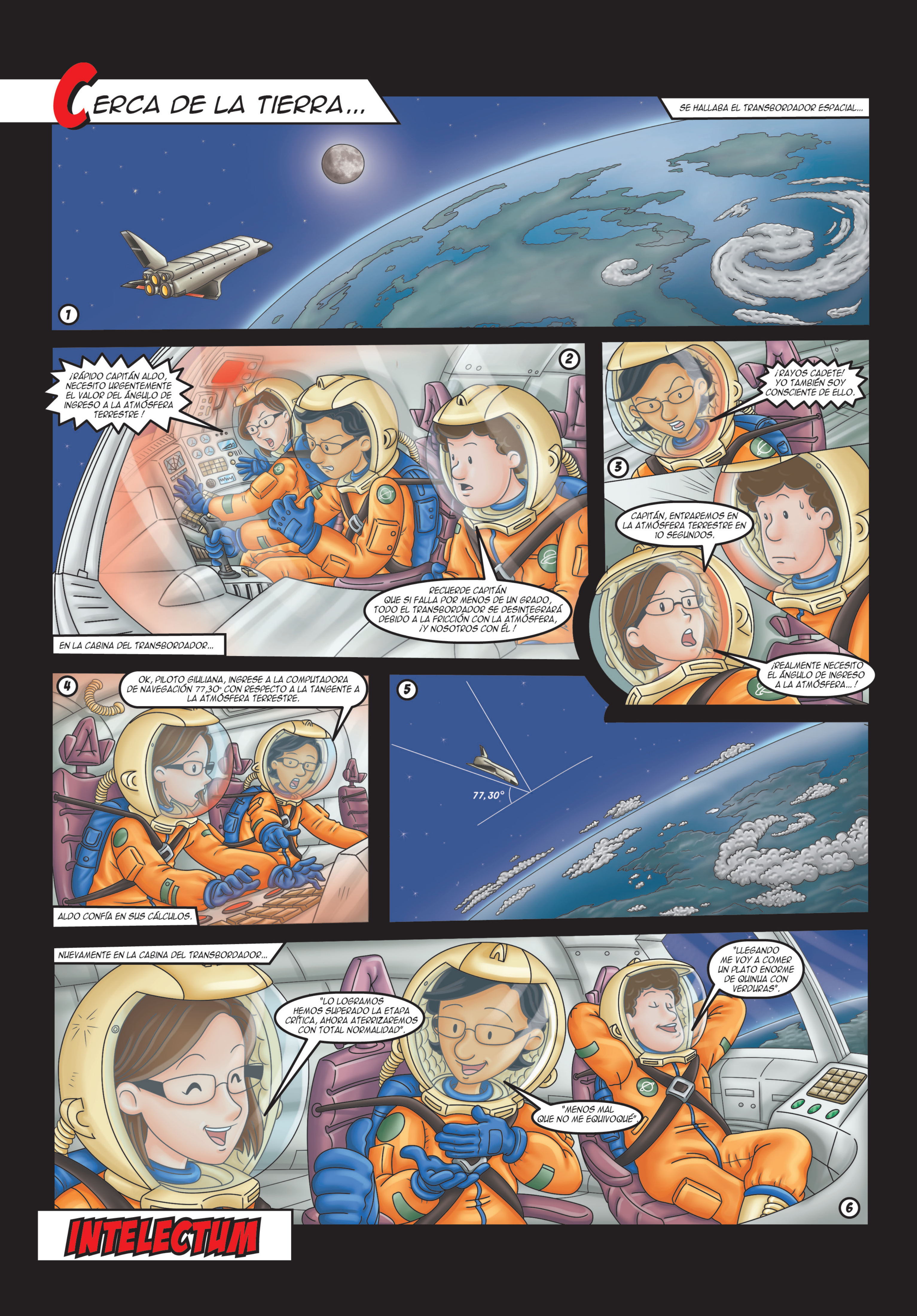
Unidad 3

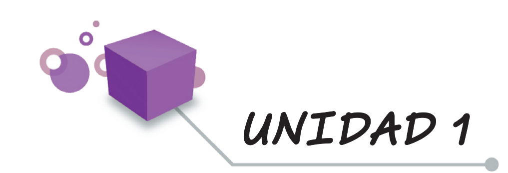
- Identifica y distingue entre triángulos notables exactos, aproximados y pitagóricos.
- Identifica gráficamente el tipo de triángulo notable y calcula el valor de sus lados.
- Relaciona los lados del triángulo utilizando razones trigonométricas.
- Analiza cada uno de los triángulos notables dados.
- Utiliza las distintas razones trigonométricas para el cálculo de medidas y áreas en triángulos rectángulos.
- Define las razones trigonométricas para triángulos exactos, aproximados y notables.
- Aplica las razones trigonométricas en los ángulos exactos, aproximados y notables.
- Discrimina entre ángulo de elevación y depresión.
- Representa gráficamente ángulos verticales y emplea las razones trigonométricas para la resolución de problemas.

Unidad 4

- Ubica, utilizando pares ordenados, rectas y figuras planas en el plano cartesiano.
- Calcula el punto medio de segmentos dentro del plano cartesiano.
- Calcula la distancia de dos puntos usando pares ordenados.
- Define un radio vector y lo representa gráficamente.
- Indica los elementos de un ángulo en posición normal y define ángulos cuadrantales y ángulos coterminales.
- Aplica las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales y coterminales.
- Analiza los ángulos dados para luego realizar la reducción escogiendo uno de los casos más convenientes.
- Realiza las reducciones al primer cuadrante según la magnitud del ángulo y su signo.
- Identifica las equivalencias de las distintas unidades.
- Diferencia múltiplo de submúltiplos al momento de realizar las conversiones entre unidades.




Cerca de la Tierra...
Se hallaba el transbordador espacial...
1
2
¡Rápido Capitán Aldo, necesito urgentemente el valor del ángulo de ingreso a la atmósfera terrestre !
Recuerde capitán que si falla por menos de un grado, todo el transbordador se desintegrará debido a la fricción con la atmósfera, ¡y nosotros con él !
En la cabina del transbordador...
3
¡Rayos cadete! yo también soy consciente de ello.
Capitán, entraremos en la atmósfera terrestre en 10 segundos.
¡Realmente necesito el ángulo de ingreso a la atmósfera... !
4
Ok, piloto Giuliana, ingrese a la computadora de navegación 77,30° con respecto a la tangente a la atmósfera terrestre.
Aldo confía en sus cálculos.
5
77,30°
Nuevamente en la cabina del transbordador...
"Lo logramos hemos superado la etapa crítica, ahora aterrizaremos con total normalidad".
"Menos mal que no me equivoqué".
"Llegando me voy a comer un plato enorme de quinua con verduras".
6
INTELECTUM

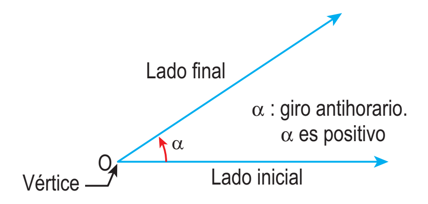


ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

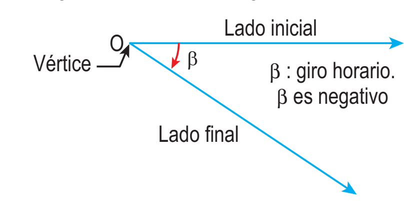
DEFINICIÓN

Es aquel ángulo generado por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice u origen, desde una posición inicial (lado inicial), hasta una posición final (lado final) y en un sentido determinado.
Por convención:

- Si la rotación se realiza en sentido antihorario, el ángulo generado se considera positivo.

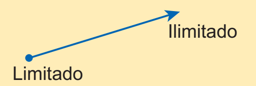


- Si la rotación se realiza en sentido horario, el ángulo se considera negativo.



Recuerda

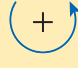
Rayo es una recta limitada por un punto en un extremo e ilimitada en el otro extremo.



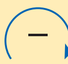


Atención

El sentido de rotación determina el signo del ángulo trigonométrico.



Giro Antihorario



Giro Horario

Ángulo geométrico

Son magnitudes y no poseen sentido de rotación (siempre son positivos).

Ángulo trigonométrico

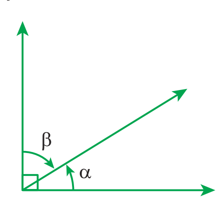
Poseen un sentido de rotación (pueden ser positivos o negativos).

Observaciones:

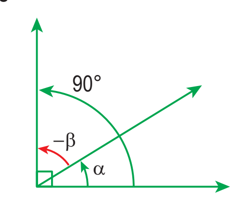
1. Para realizar la operación de adición entre ángulos trigonométricos, estos deben tener el mismo sentido de rotación.
2. Al cambiar el sentido de rotación de un ángulo trigonométrico, el signo de dicho ángulo también cambiará.

Ejemplo:

En la figura, indica la relación entre α y β.



Cambiamos el sentido de los ángulos a uno en común.



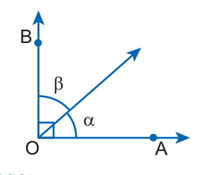
Finalmente, de la figura:

$\alpha + (-\beta) = 90°$

$\therefore\ \alpha = 90° + \beta$

Nota

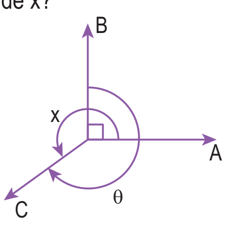
Del gráfico:
m∠AOB = 90°
Entonces:
∠AOB: ángulo recto.



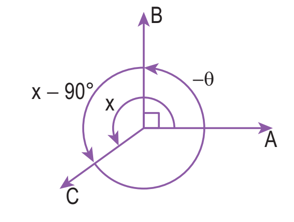
Luego:
- $\beta + \alpha = 90°$.
- β y α son complementarios.

Ejemplo:

En el gráfico mostrado, ¿cuál es el valor de x?



Resolución:



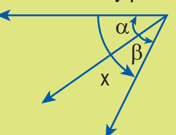
Del gráfico:

$-\theta + x - 90° = 360°$

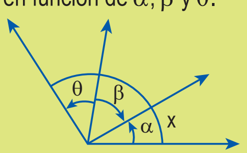
$\therefore\ x = 450° + \theta$

EFECTUAR

1. Halla x en función de α y β.

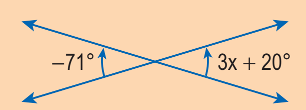


2. Halla x en función de α, β y θ.

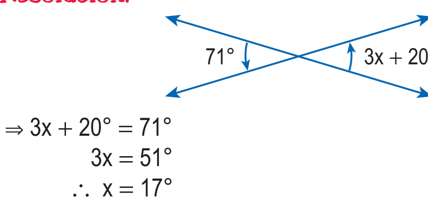


Problemas resueltos

1 Halla x.

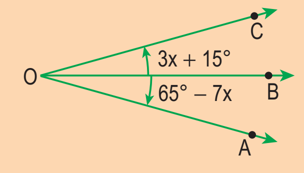


Resolución:



$\Rightarrow 3x + 20° = 71°$
$3x = 51°$
$\therefore\ x = 17°$

2 Halla x, si $\overleftrightarrow{OB}$ es bisectriz.

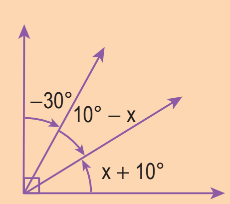


Resolución:

Por ser $\overleftrightarrow{OB}$ bisectriz, entonces:

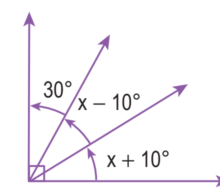
$3x + 15° = -(65° - 7x)$ (Sentido antihorario)
$3x + 15° = -65° + 7x$
$3x - 7x = -80°$
$-4x = -80°$
$x = \dfrac{80°}{4}$
$\therefore x = 20°$

3 Calcula x.



Resolución:

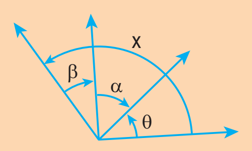
Colocando los ángulos en sentido antihorario.



Por lo tanto:

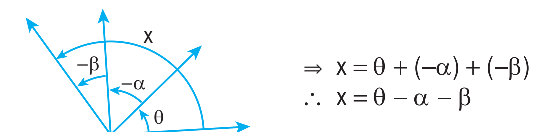
$(x + 10°) + (x - 10°) + 30° = 90°$
$x + 10° + x - 10° + 30° = 90°$
$2x + 30° = 90°$
$2x = 60°$
$\therefore x = 30°$

4 Calcula x en términos de $\alpha; \beta$ y θ.



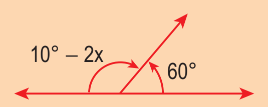
Resolución:

Colocando los ángulos en sentido antihorario (se observa que algunos ángulos cambian de signo).



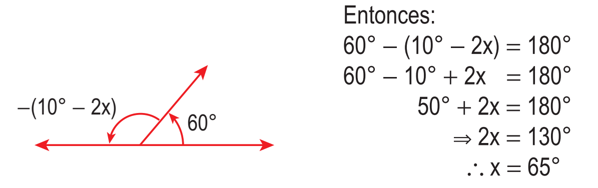
$\Rightarrow\ x = \theta + (-\alpha) + (-\beta)$
$\therefore\ x = \theta - \alpha - \beta$

5 Calcula x.



Resolución:

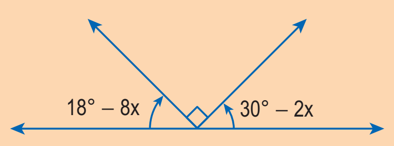
Colocando los ángulos en un solo sentido (antihorario).



Entonces:

$60° - (10° - 2x) = 180°$
$60° - 10° + 2x = 180°$
$50° + 2x = 180°$
$\Rightarrow 2x = 130°$
$\therefore x = 65°$

6 Calcula x.

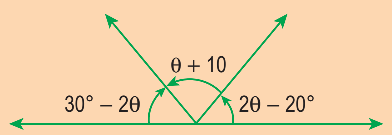


Resolución:

Se observa que:

$30° - 2x + [-(18° - 8x)] = 90°$
$30° - 2x - 18° + 8x = 90°$
$12° + 6x = 90° \ \Rightarrow\ x = 13°$

7 Del gráfico, determina θ.



Resolución:

Se observa que:

$2\theta - 20° + \theta + 10° - (30° - 2\theta) = 180°$
$2\theta - 20° + \theta + 10° - 30° + 2\theta = 180°$
$5\theta - 40° = 180°$
$5\theta = 220° \ \Rightarrow\ \theta = 44°$

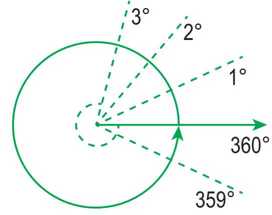
SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

T

Existen diferentes formas de medir los ángulos, cada uno basado en una unidad de medición destacando los siguientes:

SISTEMA SEXAGESIMAL O INGLÉS

Tiene como unidad al grado sexagesimal (1°), que es el resultado de dividir el ángulo de una vuelta en 360 partes iguales.



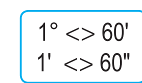
$$\frac{m\angle 1\text{ vuelta}}{360} = 1^\circ \Rightarrow \boxed{m\angle 1\text{ vuelta} = 360^\circ}$$

El grado sexagesimal (1°), también se divide en subunidades:

1' : Minuto sexagesimal.

1'' : Segundo sexagesimal.

Se definen:



Se deducen.

$1^\circ <> 3600''$

$1' <> \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$1'' <> \left(\frac{1}{60}\right)'$

Ejemplos:

1. Expresa 1344' en grados sexagesimales.

   Resolución:

   $1344' = 1344 \,.\, 1' = 1344 \,.\, \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

   $= \left(\frac{1344}{60}\right)^\circ = 22{,}4^\circ$

   $\therefore\; 1344' <> 22{,}4^\circ$

2. Expresa 43' en segundos sexagesimales.

   Resolución:

   $43' = 43 \,.\, 1' = 43 \,.\, (60'') = 2580''$

   $\therefore\; 43' <> 2580''$

Recuerda

Las subunidades se usan para expresar las medidas de ángulos menores a un grado (1° ó 1^g) o menores a un minuto ($1'$ ó 1^m).

Ejemplos:

$0{,}5^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{1}{2}.(1^\circ) = \frac{1}{2}.(60')$

$0{,}5^\circ = 30'$

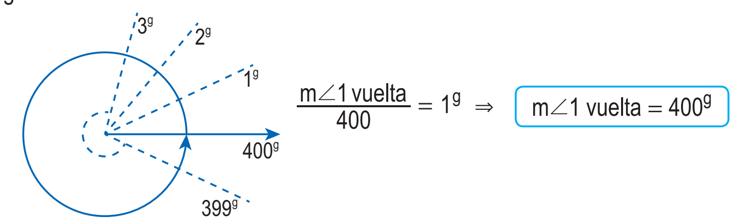
$0{,}7^g = \left(\frac{7}{10}\right)^g = \frac{7}{10}.1^g = \frac{7}{10}.100^m$

$0{,}7^g = 70^m$



SISTEMA CENTESIMAL O FRANCÉS

Es aquel que tiene como unidad al grado centesimal (1^g), el cual es el resultado de dividir el ángulo de una vuelta en 400 partes iguales.



Análogamente al sistema sexagesimal, el grado centesimal (1^g) se subdivide en:

1^m: Minuto centesimal.

1^s: Segundo centesimal.

Se definen:

$1^g <> 100^m$

$1^m <> 100^s$

Se deducen.

$1^g <> 10\,000^s$

$1^m <> \left(\frac{1}{100}\right)^g$

$1^s <> \left(\frac{1}{100}\right)^m$

Ejemplos:

1. Expresa 21^g en minutos centesimales.

   Resolución:

   $21^g = 21 \,.\, (1^g) = 21 \,.\, 100^m = 2100^m$

   $\therefore\; 21^g <> 2100^m$

2. Expresa $15\,259^s$ en grados centesimales.

   Resolución:

   $15\,259^s = 15\,259 \,.\, 1^s = 15\,259 \,.\, \left(\frac{1}{100}\right)^m = \left(\frac{15\,259}{100}\right)^m$

   $= \frac{15\,259}{100} \,.\, 1^m = \frac{15\,259}{100} \,.\, \left(\frac{1}{100}\right)^g = \frac{15\,259^g}{10\,000}$

   $\therefore\; 15\,259^s <> 1{,}5259^g$

Atención

Si expresamos un ángulo en grados, minutos y segundos, ten en cuenta:

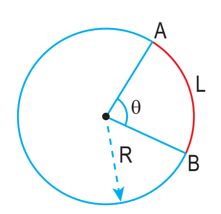
$a^\circ b' c''$; $b < 60$, $c < 60$

$x^g y^m z^s$; $y < 100$, $z < 100$



SISTEMA RADIAL O INTERNACIONAL

Es aquel que tiene como unidad de medida a "un radián" (1 rad), definido como la medida de un ángulo central donde la longitud de arco que subtiende es igual al radio de la circunferencia que la contiene.

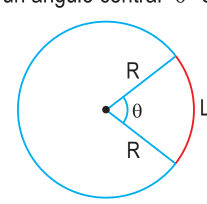


Donde:
θ: ángulo central.
R: radio de circunferencia.
L: longitud de arco $\overset{\frown}{AB}$.

Si: L = R, entonces:

$\theta = 1 \text{ rad}$

En general, sea un ángulo central "θ" en el sistema radial, se calcula mediante la expresión:



$$\theta = \frac{L}{R} \quad \text{... (1)}$$

De la expresión (1), para el ángulo de una vuelta:

$m\angle 1\text{vuelta} = \frac{l}{R}$; l: perímetro de la circunferencia.

$m\angle 1\text{vuelta} = \frac{2\pi R}{R}$ $\therefore$ $m\angle 1\text{vuelta} = 2\pi \text{ rad}$

CONVERSIÓN ENTRE SISTEMAS

Para un ángulo trigonométrico, es la transformación de un ángulo de un sistema de medida angular a otro. Para tal propósito existen métodos de transformación tales como:

Factor de conversión

Es una fracción donde el numerador y el denominador valen lo mismo (valores iguales o equivalentes expresados en unidades distintas), por lo que dicha fracción es igual a la unidad.
De los sistemas sexagesimal, centesimal y radial tenemos que:

$m\angle 1\text{vuelta} = 360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$ Entonces: $180° = 200^g = \pi \text{ rad}$

(Equivalencias)

Del recuadro de equivalencias, se pueden obtener factores de conversión para los tres sistemas.

Ejemplo:
Expresa 40^g en el sistema sexagesimal.

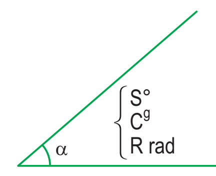
$40^g = 40^g \,.\, 1 = 40^g \,.\, \frac{180°}{200^g}$ → Sistema final → Sistema inicial

$40^g = \left(40 \,.\, \frac{180}{200}\right)^°$

$\therefore\ 40^g = 36°$

Fórmulas de conversión

Sea un ángulo α cuya representación en los sistemas sexagesimal, radial y centesimal son, respectivamente, S°, R rad, C^g.



S°: en el sistema sexagesimal.
C^g: en el sistema centesimal.
R rad: en el sistema radial o circular.

Por lo tanto:

$m\angle\alpha = S° = C^g = R \text{ rad}$ ... (A)

Por factores de conversión:
Transformemos S° al sistema centesimal.

$S° = S° \,.\, 1 = S° \,.\, \frac{200^g}{180°} = \left(\frac{S \,.\, 200}{180}\right)^g = C^g$; de la expresión (A) donde: $S° = C^g$

Nota

Valores aproximados de π:
$\pi \approx 3{,}1416$
$\pi \approx \frac{22}{7}$



Observación

De la equivalencia:
$180° = 200^g$
$20 \,.\, 9° = 20 \,.\, 10^g$
$9° = 10^g$

Entonces:
$\frac{9°}{10^g}; \frac{10^g}{9°}$ Son factores de conversión.

Nota

Sea un ángulo α en el sistema A, para transformar α a un sistema B, su factor de conversión será de la forma:
$\frac{b}{a}$; donde {b, sistema B (final); a, sistema A (inicial)}

Ejemplo:
Un factor de conversión para transformar un ángulo del sistema sexagesimal al radial
Por equivalencias: π rad = 180°, de sexagesimal (inicial), a radial (final).

$1 = \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$ → Sistema final → Sistema inicial
Factor de conversión



Luego:

$\frac{S\,.\,200}{180} = C$ Finalmente: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200}$ ... (1)

Análogamente, transformemos C^g a radianes.

$C^g = C^g\,.\,1 = C^g\,.\,\frac{\pi\,\text{rad}}{200^g} = \frac{C\pi}{200}\text{rad} = R\,\text{rad}$; de la expresión (A) donde: $C^g = R$ rad.

Luego:

$\frac{C\pi}{200} = R$ Finalmente: $\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$ ... (2)

De (1) y (2) se obtiene:

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

(Fórmula o relación de conversión)

También de: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} \Rightarrow \boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10}}$

USO DE LA FÓRMULA DE CONVERSIÓN

Convierte de un sistema a otro.

Ejemplos:

1. Convierte 54° al sistema centesimal.
   En este caso, tenemos:
   Dato: S = 54; incógnita: C
   De la fórmula:
   $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \rightarrow \frac{54}{9} = \frac{C}{10} \rightarrow C = \frac{54\,.\,10}{9}$
   $C = 60$
   $\therefore\ 54° = 60^g$

2. Convierte 36° a radianes.
   Ahora tenemos:
   Dato: S = 36°; incógnita: R
   De la fórmula:
   $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{36\,.\,\pi}{180}$
   $R = \frac{\pi}{5}$
   $\therefore\ 36° = \frac{\pi}{5}$ rad

Problemas condicionales

Ejemplos:

1. Halla la medida de un ángulo en radianes si su número de grados centesimales y sexagesimales cumplen: $C - S = 4$

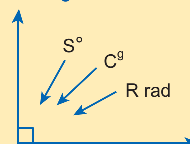
   Resolución:
   En el dato, procuramos colocar todo en función de la incógnita, para ello usamos la fórmula:
   $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow C = \frac{200R}{\pi} \ \wedge\ S = \frac{180R}{\pi}$
   Reemplazando en el dato, tenemos:
   $C - S = 4$
   $\frac{200R}{\pi} - \frac{180R}{\pi} = 4 \Rightarrow \frac{20R}{\pi} = 4 \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$ $\therefore$ El ángulo mide $\frac{\pi}{5}$ rad.

2. ¿Cuántos minutos centesimales hay en: $\theta = 3^g45^m$?

   Resolución:
   Convertimos todo a minutos:
   $\theta = 3^g45^m = 3^g + 45^m$; como: $1^g = 100^m \Rightarrow 3^g = 300^m$
   Luego: $\theta = 300^m + 45^m$
   $\therefore\ \theta = 345^m$

Observación

Sea un ángulo recto:



El cual es la cuarta parte de una vuelta, entonces:

$m\angle 1\text{vuelta} = 360° = 400^g = 2\pi$ rad

$\frac{m\angle 1\text{vuelta}}{4} = 90° = 100^g = \frac{\pi}{2}$ rad

Por lo tanto:

$m\angle\ \text{recto} = 90° = 100^g = \frac{\pi}{2}$ rad

Donde:

$S = 90;\ C = 100;\ R = \frac{\pi}{2}$



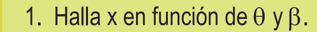
Nota

Los ejercicios de transformación de un ángulo de un sistema de medida a otro, pueden resolverse usando el "factor de conversión" así como también la "fórmula de conversión".

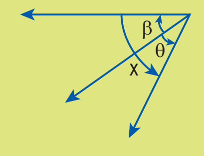
Del ejemplo (1).

$54° = 54°\,.\,1 = 54°\,.\,\underbrace{\frac{10^g}{9°}}_{\text{Factor de conversión}} = 60^g$

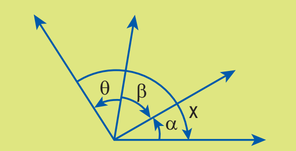
EFECTUAR



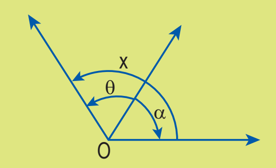
1. Halla x en función de θ y β.



2. Halla x en función de α, β y θ.



3. Halla x del gráfico mostrado.



Problemas resueltos

1 Convierte 50^g a radianes.

Resolución:

$$50^g.\underbrace{\left(\frac{\pi \text{ rad}}{200^g}\right)}_{\text{Factor de conversión}} = \frac{50\pi}{200} \text{ rad}$$

$\therefore 50^g = \frac{\pi}{4}$ rad

2 Expresa 5°36'45" a segundos sexagesimales.

Resolución:

5° = 5 . 1° = 5 . 3600" = 18 000"
36' = 36 . 1' = 36 . 60" = 2160"

Entonces:
5°36'45" = 18 000" + 2160" + 45"
∴ 5°36'45" = 20 205"

3 Calcula:

$$M = \frac{1°}{1'} + \frac{1^g}{1^m} + \frac{9°}{5^g}$$

Resolución:

Sabemos: $1° = 60'$; $1^g = 100^m$ y $9° = 10^g$
Reemplazando:

$$M = \frac{60'}{1'} + \frac{100^m}{1^m} + \frac{10^g}{5^g}$$

$\Rightarrow M = 60 + 100 + 2$
$\therefore M = 162$

4 Expresa $3{,}2141^g$ en grados, minutos y segundos centesimales.

Resolución:

$3{,}2141^g = 3^g + 0{,}2141 . 1^g = 3^g + 0{,}2141 . 100^m = 3^g + 21{,}41^m$
$3{,}2141^g = 3^g + 21^m + 0{,}41^m = 3^g + 21^m + 0{,}41 . 100^s$
$3{,}2141^s = 3^g + 21^m + 41^s$
$\therefore 3{,}2141^g = 3^g 21^m 41^s$

5 Calcula:
a) ¿Cuántos segundos sexagesimales tiene 4°30'?
b) ¿Cuántos segundos centesimales tiene $5^g\,20^m$?

Resolución:

a) $1° \longrightarrow 3600"$
$4° \longrightarrow x \Rightarrow x = \frac{4°\,.\,3600"}{1°} = 14\,400"$

$1' \longrightarrow 60"$
$30' \longrightarrow y \Rightarrow y = \frac{30'\,.\,60"}{1'} = 1800"$

∴ 4°30' tienen: x + y = 16 200"

b) $1^g \longrightarrow 10\,000^s$
$5^g \longrightarrow x \Rightarrow x = 50\,000^s$

$1^m \longrightarrow 100^s$
$20^m \longrightarrow y \Rightarrow y = 2000^s$

$\therefore 5^g\,20^m$ tienen: $x + y = 52\,000^s$

6 Calcula:

$$E = \frac{\frac{11\pi}{90} + \left(\frac{280}{9}\right)^g}{\frac{\pi}{60} + 7°}$$

Resolución:

$$E = \frac{\frac{11\pi}{90} + \left(\frac{280}{9}\right)^g\left(\frac{\pi}{200^g}\right)}{\frac{\pi}{60} + 7°\left(\frac{\pi}{180°}\right)} = \frac{\frac{11\pi}{90} + \frac{14\pi}{90}}{\frac{\pi}{60} + \frac{7\pi}{180}}$$

$$E = \frac{\frac{25\pi}{90}}{\frac{3\pi + 7\pi}{180}} = \frac{\frac{25\pi}{90}}{\frac{10\pi}{180}} = \frac{25\pi.180}{90.10\pi}$$

$\therefore E = 5$

7 Un ángulo mide $\frac{\pi}{3}$ rad y su suplemento (2x + 10°). ¿Cuál es el valor de x?

Resolución:

Transformando $\frac{\pi}{3}$ rad a grados sexagesimales:

$$\frac{r}{3} \text{ rad} = \frac{r}{3} \text{ rad} \underbrace{\left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right)}_{\text{Factor de conversión}} = 60°$$

Del dato: (2x + 10°) es el suplemento de 60°.
Entonces: 2x + 10°= 120°
2x = 110°
∴ x = 55°

8 Calcula E, siendo S y C lo conocido para un ángulo no nulo.

$$E = \sqrt{\frac{18}{5} \cdot \frac{S}{C}}$$

Resolución:

Sabemos: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \frac{S}{C} = \frac{9}{10}$

Luego: $E = \sqrt{\frac{18}{5} \cdot \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{81}{25}}$

$\therefore E = \frac{9}{5}$

9 Calcula M, siendo S y C lo conocido para un ángulo no nulo.

$M = \dfrac{S + C}{C}$

Resolución:

Sabemos: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} \Rightarrow S = \dfrac{9C}{10} = 0,9C$

Luego: $M = \dfrac{0,9C + C}{C} = \dfrac{1,9C}{C}$

$\therefore M = 1,9$

10 Calcula x, siendo S y C lo conocido para un ángulo no nulo.
Si: $S = x$ y $C = x + 3$.

Resolución:

Sabemos: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10}$

Reemplazando:

$\dfrac{x}{9} = \dfrac{x+3}{10} \Rightarrow 10x = 9x + 27$

$\therefore x = 27$

11 Simplifica E, siendo S, C y R lo conocido para un ángulo no nulo.

$E = \dfrac{\pi C + \pi S + 20R}{200R}$

Resolución:

Sabemos: $C = \dfrac{200}{\pi}R$ y $S = \dfrac{180}{\pi}R$

Entonces:

$$E = \dfrac{\pi\left(\dfrac{200R}{\pi}\right) + \pi\left(\dfrac{180}{\pi}R\right) + 20R}{200R}$$

$$E = \dfrac{200R + 180R + 20R}{200R} = \dfrac{400R}{200R}$$

$\therefore E = 2$

12 El número de grados sexagesimales de un ángulo, más el doble de su número de grados centesimales es 261. ¿Cuánto mide el ángulo en radianes?

Resolución:

El número de grados sexagesimales: S
El doble de su número de grados centesimales: 2C

Del enunciado: $S + 2C = 261$

Aplicando la relación: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi} = k$

$\Rightarrow S = 180k;\ C = 200k;\ R = \pi k$

Reemplazando: $(180k) + 2(200k) = 261$

$580k = 261$

$k = \dfrac{261}{580} = \dfrac{9}{20}$

$\Rightarrow$ Nos piden: $R = \pi k = \pi\left(\dfrac{9}{20}\right)$

$\therefore R = \dfrac{9\pi}{20}$ rad

13 Los números que indican la medida de un ángulo en los sistemas conocidos satisfacen la siguiente igualdad:

$S + C + R = \dfrac{380 + \pi}{\pi}$

Calcula cuánto mide el ángulo en radianes.

Resolución:

Aplicando la relación: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi} = k$

$\Rightarrow S = 180k;\ C = 200k;\ R = \pi k$

Reemplazando en el dato:

$180k + 200k + \pi k = \dfrac{380 + \pi}{\pi}$

$380k + \pi k = \dfrac{380 + \pi}{\pi}$

$(380 + \pi)k = \dfrac{380 + \pi}{\pi} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\pi}$

Luego, el número de radianes del ángulo es:

$R = \pi k = \pi\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = 1$

$\therefore$ El ángulo mide 1 rad.

14 Si se cumple: $5S - 2C = 50$, siendo S y C lo conocido para un ángulo no nulo, ¿cuál es la medida del ángulo en radianes?

Resolución:

Aplicando la relación entre S y C: $\dfrac{S}{C} = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{k}{k}$

$\Rightarrow S = 9k \wedge C = 10k$

Reemplazando en la expresión:

$5(9k) - 2(10k) = 50$

$45k - 20k = 50$

$25k = 50$

$\Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow S = 9k = 9(2) = 18$

Luego, el ángulo en grados sexagesimales es 18°.

Piden en radianes.

$\Rightarrow R = 18°.\underbrace{\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)}_{\text{Factor de conversión}}$

$\therefore R = \dfrac{\pi}{10}$ rad

LONGITUD DE ARCO

Nota

O, d, c, a, b

Si O es centro de la circunferencia:
$a = b = c = d = R$
Donde:
R: radio de la circunferencia.

CIRCUNFERENCIA

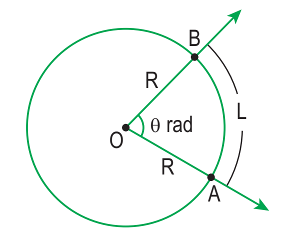
Conjunto de puntos en un mismo plano que equidistan de un punto llamado centro. A dicha distancia se le denomina radio.

ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Es una porción de circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma.

LONGITUD DE ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Es la medida, en unidades de longitud, del arco correspondiente a un ángulo central.



$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia AB.
L: longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.
θ: ángulo central correspondiente a $\overset{\frown}{AB}$.
R: radio de la circunferencia.

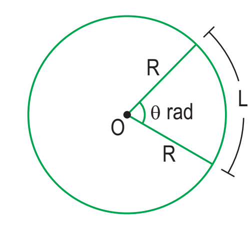
Cálculo de la longitud de arco

Partimos de la definición (sistema de medidas angulares) que expresa la medida de un ángulo central en el sistema radial.

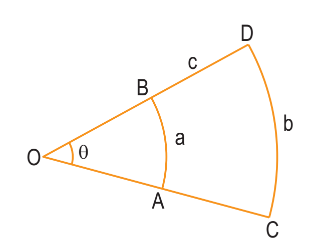
$\theta = \frac{L}{R}$, entonces: $\boxed{L = \theta R}$

R, L: están en el mismo sistema de unidades de medida longitudinal (m; cm; mm; etc.).

θ: indica el número de radianes del ángulo central.



Ejemplo:
Sean los sectores circulares AOB y COD, calcula el valor de θ si a, b son longitudes de arco.

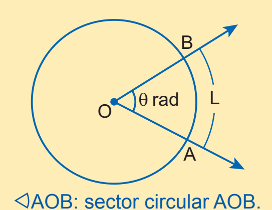


Resolución:
Sean R_1 y R_2 radios de los sectores circulares AOB y COD, respectivamente.
$\theta R_1 = a \wedge \theta R_2 = b$

Entonces:
$R_1 = \frac{a}{\theta} \wedge R_2 = \frac{b}{\theta}$
$c = R_2 - R_1$
$c = \frac{b-a}{\theta} \quad \therefore \theta = \frac{b-a}{c}$

Observación

A la región limitada por dos radios y su arco correspondiente se denomina: **sector circular.**



◁AOB: sector circular AOB.



Observación

Del ejemplo, en todo trapecio circular se cumple:

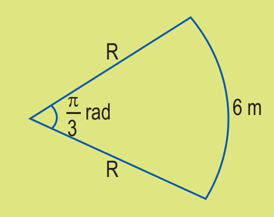
$\boxed{\theta = \frac{b-a}{c}}$

Donde:
θ: ángulo central en radianes.
a, b: longitudes de arco.
c: altura del trapecio circular.

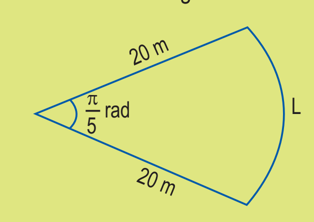
EFECTUAR



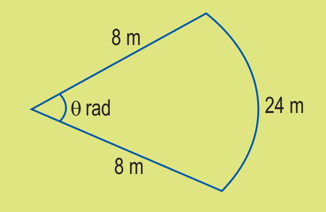
1. Calcula R.



2. Calcula L de la figura.

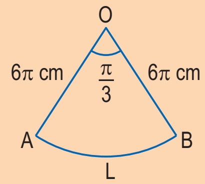


3. Calcula θ en el gráfico.



Problemas resueltos

1 Halla la longitud del arco AB.

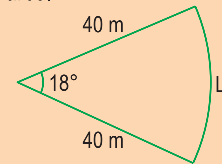


Resolución:

Sabemos: $L = \theta \,.\, R$

$\therefore\ L = \frac{\pi}{3} \,.\, 6\pi = 2\pi^2$ cm

2 Halla la longitud del arco.



Resolución:

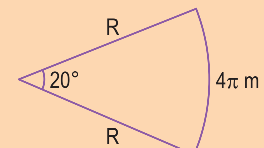
El ángulo tiene que estar expresado en radianes.

Entonces: $18° = 18°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{\pi}{10}$ rad

Luego: $L = \theta \,.\, R = \left(\frac{\pi}{10}\right) . \,40$

$\therefore\ L = 4\pi$ m

3 Halla el radio del sector circular.



Resolución:

Transformando 20° a radianes, entonces:

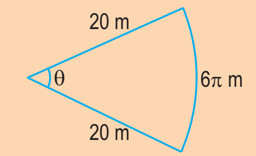
$20° = 20°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{\pi}{9}$ rad

Luego: $L = \theta \,.\, R$

$4\pi = \frac{\pi}{9}.R \ \Rightarrow\ R = \frac{4\pi \,.\, 9}{\pi}$

$\therefore R = 36$ m

4 Halla el ángulo del sector circular en sexagesimales.



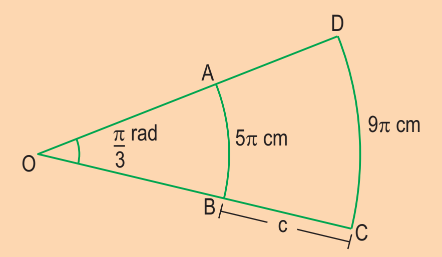
Resolución:

Sabemos: $L = \theta \,.\, R$

$\Rightarrow 6\pi = \theta \,.\, 20$

$\frac{6\pi}{20} = \theta \qquad \therefore\ \theta = \frac{3\pi}{10} \text{ rad} = 54°$

5 Calcula el valor de c.



Resolución:

En el trapecio ABCD se cumple la relación:

$\theta = \frac{m\overset{\frown}{DC} - m\overset{\frown}{AB}}{c}$

Donde: θ es el ángulo central en radianes.

$\frac{\pi}{3} = \frac{9\pi - 5\pi}{c}$

$\therefore\ c = 12$ cm

6 Calcula la longitud del arco de un sector circular, sabiendo que su radio mide 12 m y su ángulo central 22°30'.

Resolución:

- Datos: $R = 12$ m $\wedge$ $\theta = 22°30'$

Convertimos θ a radianes:

$22°30' = 22° + 30' = 22° + 30'\left(\frac{1°}{60'}\right) = 22° + \frac{1°}{2}$

$= \frac{45°}{2} \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$ rad

Usando la fórmula: $L = \theta R$

$\Rightarrow L = \frac{\pi}{8} \cdot (12) = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ La longitud del arco mide $\frac{3\pi}{2}$ m.

7 La longitud del arco de un sector circular mide 12 m, ¿cuál será la longitud del arco, si se disminuye el ángulo a la mitad y el radio se triplica?

Resolución:

1.er caso:

- El ángulo central: θ
- El radio mide: R $\Rightarrow$ $L_1 = \theta \,.\, R = 12$ m ...(I)

2.° caso:

- El ángulo central: $\frac{\theta}{2}$
- El radio mide: 3R $\Rightarrow L_2 = \left(\frac{\theta}{2}\right)(3R) = \frac{3}{2}\theta R$ ...(II)

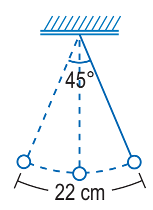
Reemplazando (I) en (II): $\Rightarrow\ L_2 = \frac{3}{2}(\theta \,.\, R) = \frac{3}{2}(12) = 18$

$\therefore$ La nueva longitud medirá 18 m.

8 Un péndulo oscila describiendo un ángulo de 45° y un arco de 22 cm.

Halla la longitud del péndulo. $\left(\text{considerar } \pi \approx \frac{22}{7}\right)$

Resolución:



– El ángulo central: $\theta = 45°$
– La longitud de arco: L = 22 cm

Convertimos θ a radianes.

$$45° \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

⇒ Usando la fórmula: $L = \theta \cdot R$

$$22 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot R \Rightarrow R = \frac{88}{\pi}$$

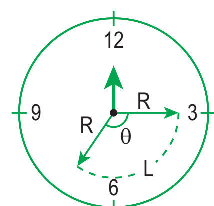
$$\Rightarrow R = \frac{88}{\left(\frac{22}{7}\right)} \Rightarrow R = \frac{88.7}{22} = 28$$

∴ La longitud del péndulo es 28 cm.

9 En un reloj, cuyo minutero mide 63 cm, Halla la longitud que recorre su extremo cuando transcurren 20 minutos. $\left(\text{considerar } \pi \approx \frac{22}{7}\right)$

Resolución:

Dado que tenemos el valor del radio, Calculamos el ángulo central.



El minutero recorre una vuelta en 60 minutos, entonces:

360° ⟶ 60'
θ ⟶ 20'

$$\Rightarrow \theta = \frac{360°.20'}{60'} = 120°$$

$$\Rightarrow \theta = 120°.\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

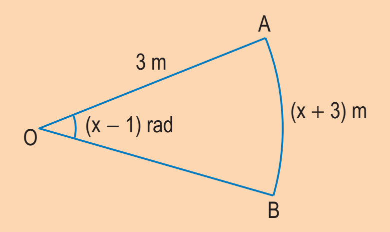
⇒ La longitud que recorre el extremo del minutero será:

$L = \theta \cdot R$

$$L = \left(\frac{2\pi}{3}\right).(63) = \frac{2}{3}.\left(\frac{22}{7}\right).63 = 132$$

⇒ L = 132 cm

10 Calcula el perímetro del sector circular.



Resolución

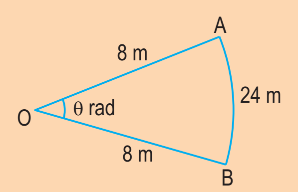
Hallamos x para calcular el perímetro (2p) de AOB, se sabe:

$(x + 3) = 3(x - 1)$
$x + 3 = 3x - 3$
$2x = 6$
$x = 3$

El perímetro (2p) será igual a:

$2p = 3 + x + 3 + 3$
$2p = 9 + 3$
∴ 2p = 12 m

11 Calcula el ángulo central en el sistema inglés.



Resolución:

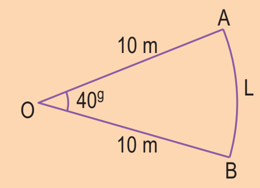
$L = \theta \cdot R$
$24 = \theta \cdot 8$
$3 = \theta$

m∠AOB = 3 rad
En el sistema inglés:

$$m\angle AOB = 3 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$$

$$\therefore m\angle AOB = \left(\frac{540°}{\pi}\right)$$

12 Calcula L del siguiente gráfico.



Resolución:

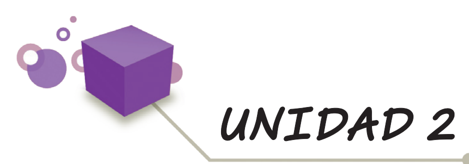
Transformando el ángulo AOB a radianes:

$$40^g = 40^g \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

Luego:

$$L = \theta \cdot R = \left(\frac{\pi}{5}\right).10$$

∴ $L = 2\pi$ m



ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

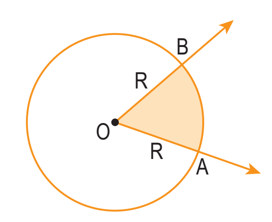


CÍRCULO

Es el conjunto de puntos en el plano que se encuentran contenidos en el interior y sobre una circunferencia.

SECTOR CIRCULAR

Es la región plana que se encuentra limitada por dos radios y su arco correspondiente.



$\sphericalangle_{AOB}$: sector circular AOB.

R: radio de la circunferencia.

$\overset{\frown}{AB}$: arco AB.

S $\sphericalangle_{AOB}$: área del sector circular AOB.

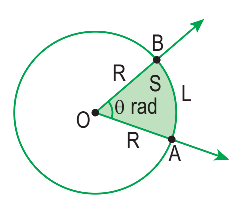
Cálculo del área del sector circular

Podemos deducir el área del sector circular, ya que es proporcional al ángulo central asociada a dicho sector. Entonces:

Si el área de un sector circular es proporcional al ángulo, entonces el área del círculo con el ángulo de una vuelta también lo serán, luego:

$$\frac{S}{\theta} = \frac{\text{Área del círculo}}{2\pi} \Rightarrow \frac{S}{\theta} = \frac{\pi R^2}{2\pi}$$

$$\therefore S = \frac{\theta . R^2}{2} \quad ...(1)$$



Donde:
S: área del sector circular
R: radio del círculo
θ: número de radianes del ángulo central
L: longitud de arco AB

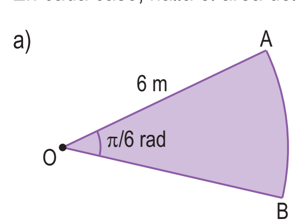
Además:
$\theta R = L$ ... (2)
De (1) y (2) se deducen otras expresiones para el cálculo del aréa del sector circular:

$$S = \frac{\theta R^2}{2} \qquad S = \frac{LR}{2} \qquad S = \frac{L^2}{2\theta}$$

Ejemplos:

1. En cada caso, halla el área del sector circular indicado:

a)

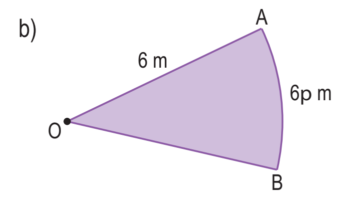


Reconocemos los datos: $\theta = \frac{\pi}{6} \wedge R = 6$ m

Usamos la expresión: $S = \frac{\theta R^2}{2}$

$$S = \frac{\frac{\pi}{6}(6)^2}{2} = \frac{36\pi}{12} \qquad \therefore S = 3\pi \text{ m}^2$$

b)



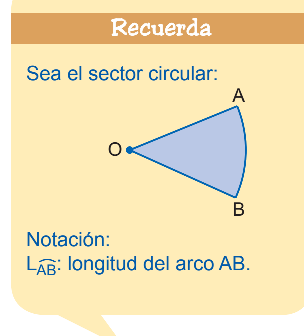
Reconocemos los datos: $L = 6\pi$ m $\wedge R = 6$ m

Usamos la expresión: $S = \frac{LR}{2}$

$$S = \frac{(6\pi)(6)}{2} \qquad \therefore S = 18\pi \text{ m}^2$$

Recuerda

Sea el sector circular:

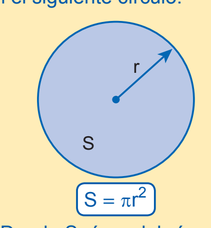


Notación:
$L_{\overset{\frown}{AB}}$: longitud del arco AB.



Observación

En el siguiente círculo:



$S = \pi r^2$

Donde S: área del círculo.
r: radio del círculo.



Nota

El uso de una u otra expresión dependerá exclusivamente de los datos con que cuenten en cada problema que se intente resolver. Además no se debe olvidar que el ángulo central debe tener su medida expresada en **radianes**.

Atención

Para calcular el área de un sector circular ten en cuenta los datos que te proporcionan para usar cualquiera de las expresiones adecuadamente:

R; θ	$S = \frac{1}{2}\theta R^2$
R; L	$S = \frac{LR}{2}$
L; θ	$S = \frac{L^2}{2\theta}$



Nota

Análogo a las expresiones para calcular el área de un sector circular se puede deducir otras expresiones para el cálculo del área de un trapecio circular:

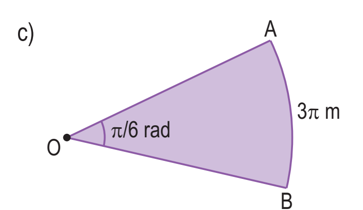
$$S = \frac{(L_1 + L_2)h}{2}$$

$$S = \frac{L_1^2 - L_2^2}{2\theta}$$

$$S = \frac{L_1R_1 - L_2R_2}{2}$$

Dejamos al lector la demostración de estas expresiones.

c)

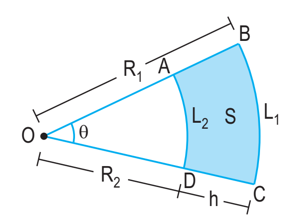


Reconocemos los datos: $L = 3\pi$ m $\wedge$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad

Usamos la expresión: $S = \frac{L^2}{2\theta}$

$$S = \frac{(3\pi)^2}{2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \qquad \therefore\ S = 27\pi\ m^2$$

2. Calcula el área del trapecio circular ABCD en términos de L_1; L_2 y h.



Donde:
R_1: radio del sector circular COB.
R_2: radio del sector circular AOD.
L_1: longitud de arco BC.
L_2: longitud de arco AD.
θ: número de radianes del ángulo.
S: área del trapecio circular.

Sean S_1 y S_2 las áreas de los sectores circulares BOC y AOD, respectivamente. Entonces el área de la región sombreada se puede expresar como:

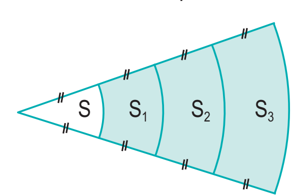
$S = S_1 - S_2$ ....(1)

Reemplazando la expresión $\frac{\theta R^2}{2}$ (área de un sector circular) en (1):

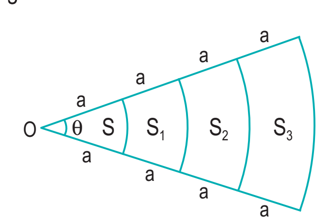
$$S = \frac{\theta R_1^2}{2} - \frac{\theta R_2^2}{2} = \frac{\theta}{2}(R_1^2 - R_2^2) \qquad S = \frac{\theta}{2}(R_1 + R_2)(R_1 - R_2) = \frac{(\theta R_1 + \theta R_2)h}{2}$$

De la expresión: $L = \theta R$ $\qquad \therefore\ S = \frac{(L_1 + L_2)h}{2}$

3. Calcula el área de los trapecios circulares en función de S.



Del gráfico tenemos:



Sabemos:

$$S = \frac{\theta.R^2}{2} = \frac{\theta.a^2}{2}$$

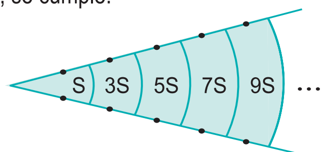
Además:

- $S + S_1 = \frac{\theta.(2a)^2}{2} = 4\underbrace{\left(\frac{\theta.a^2}{2}\right)}_{S} \Rightarrow S_1 = 3S$

- $S + \underbrace{S_1}_{3S} + S_2 = \frac{\theta(3a)^2}{2} = 9\underbrace{\left(\frac{\theta.a^2}{2}\right)}_{S} \Rightarrow S_2 = 5S$

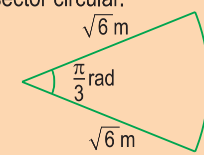
- $S + S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\theta(4a)^2}{2} = 16\underbrace{\left(\frac{\theta.a^2}{2}\right)}_{S} \Rightarrow S_3 = 7S$

En general, se cumple:



Problemas resueltos

1 Calcula el área del sector circular.



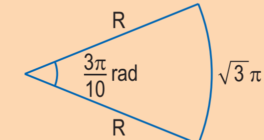
Resolución:

$S = \dfrac{\theta . R^2}{2}$

$S = \dfrac{\frac{\pi}{3}.(\sqrt{6})^2}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{3}.6}{2} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ El área del sector circular es π m^2.

2 Calcula el área del sector circular.



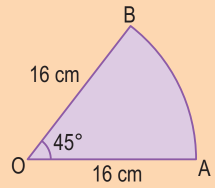
Resolución:

$S = \dfrac{L^2}{2\theta}$

$S = \dfrac{(\sqrt{3}\,\pi)^2}{2\left(\frac{3\pi}{10}\right)} = \dfrac{3\pi^2}{\frac{3\pi}{5}} = 5\pi$

$\therefore$ El área del sector circular es 5π.

3 Calcula el área del sector circular.



Resolución:

El área de un sector circular es:

$S = \dfrac{\theta . R^2}{2}$, donde el ángulo θ tiene que estar expresado en radianes.

$\Rightarrow 45° = 45°\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ rad

$\Rightarrow S = \dfrac{\left(\frac{\pi}{4}\right).(16)^2}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{4}.256}{2} = \dfrac{64\pi}{2}$

$\therefore$ El área del sector circular es 32π cm^2.

4 En un sector circular, el producto de la longitud del radio y el arco es 36π. ¿Cuál es el área del sector circular?

Resolución:

Sabemos que el área del sector circular es:

$S = \dfrac{L.R}{2}$

Del dato: $L.R = 36\pi$

Pero: $\dfrac{LR}{2} = \dfrac{36\pi}{2} \Rightarrow S = \dfrac{36\pi}{2} = 18\pi$

$\therefore$ El área del sector circular es 18π.

5 ¿Cuánto debe medir el radio de un sector circular para que su área sea numéricamente igual al triple de su longitud de arco?

Resolución:

Del dato: $S = 3L$

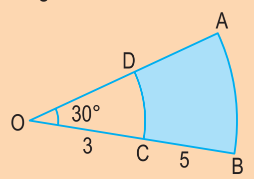
Entonces: $\dfrac{\theta . R^2}{2} = 3(\theta . R)$

$\theta . R^2 = 6\theta . R$

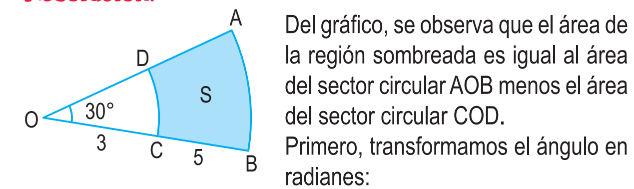
$R^2 = 6R$

$R . R = 6R \Rightarrow R = 6$

6 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:



Del gráfico, se observa que el área de la región sombreada es igual al área del sector circular AOB menos el área del sector circular COD.

Primero, transformamos el ángulo en radianes:

$30° = 30°\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ rad

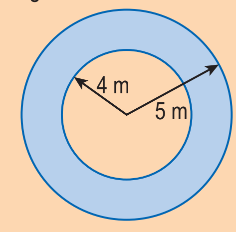
Luego:

$S = S_{\triangleleft AOB} - S_{\triangleleft COD}$

$S = \dfrac{\frac{\pi}{6}(8)^2}{2} - \dfrac{\frac{\pi}{6}(3)^2}{2} = \dfrac{\frac{64\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}}{2} = \dfrac{\frac{55\pi}{6}}{2}$

$\therefore$ El área de la región sombreada es $\dfrac{55\pi}{12}$.

7 Calcula el área de la región sombreada:



Resolución:

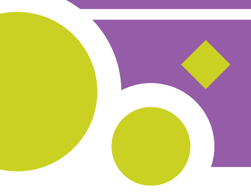
Sea S el área de la región sombreada $R_1 = 5$ m y $R_2 = 4$ m.

Del gráfico se observa:

$S = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2)$

Luego:

$S = \pi(5^2 - 4^2) = \pi(25 - 16)$ $\therefore S = 9\pi$ m^2



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

CONCEPTOS PREVIOS

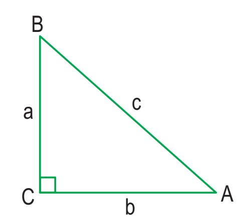
Ángulo agudo

Es aquel ángulo cuya medida se encuentra entre 0° y 90°.

Si: $0° < \alpha < 90° \Rightarrow \alpha$ es agudo.

Triángulo rectángulo

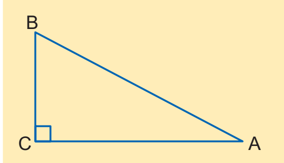
Es aquel triángulo que posee un ángulo recto.



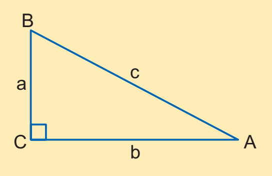
Donde:
a; b; c: longitudes de los lados
AC; BC: catetos
AB: hipotenusa

Recuerda

Al dibujar un triángulo rectángulo considera lo siguiente:
Sea el ⊿ACB recto en C:



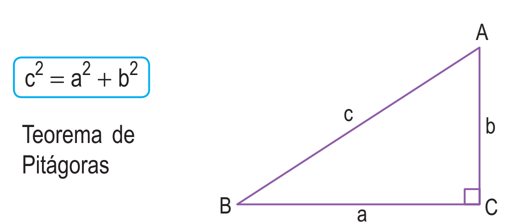
Las longitudes de los lados correspondientes a cada ángulo se denotan con letras minúsculas según corresponda, entonces:



Donde:
a; b; c: longitudes de los lados correspondientes a cada ángulo.



Teorema de Pitágoras. En el triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

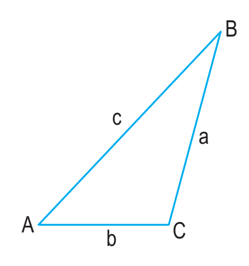


Posición relativa de catetos. Los catetos de un triángulo rectángulo pueden denominarse tanto **opuestos** como **adyacentes** respecto a un ángulo dependiendo de su posición relativa.

Para α:
a: cateto opuesto
b: cateto adyacente
Para θ:
b: cateto opuesto
a: cateto adyacente

Razón

En términos generales, es la comparación de dos cantidades. Para las longitudes de los lados de un triángulo, esta comparación se determina mediante su cociente.



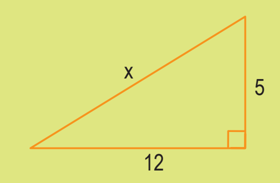
Comparando los lados del triángulo ABC, obtenemos 6 razones:

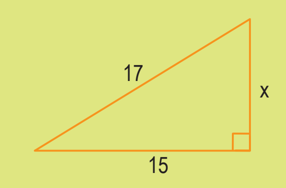
$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$$

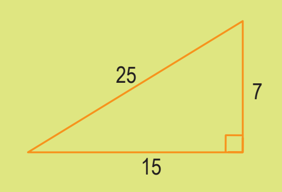
EFECTUAR



Halla x en cada caso.



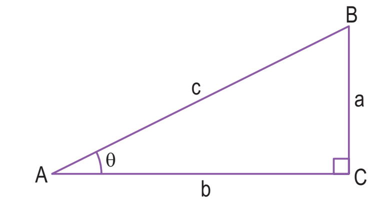




RAZÓN TRIGONOMÉTRICA (RT)

Una razón se llama trigonométrica, si comparamos por cociente las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.
Sea el ángulo θ, en el triángulo rectángulo ACB.

a: cateto opuesto a θ
b: cateto adyacente a θ
c: hipotenusa

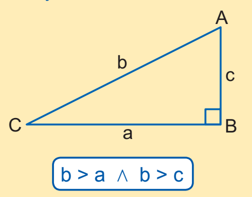


Las razones trigonométricas para el ángulo θ se definen en la siguiente tabla:

Razón trigonométrica	Definición	Notación	Se lee	En el ⊿ ABC
seno	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sen}\theta$	seno de θ	$\frac{a}{c}$
coseno	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\theta$	coseno de θ	$\frac{b}{c}$
tangente	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\tan\theta$	tangente de θ	$\frac{a}{b}$
cotangente	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\cot\theta$	cotangente θ	$\frac{b}{a}$
secante	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\sec\theta$	secante de θ	$\frac{c}{b}$
cosecante	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\csc\theta$	cosecante de θ	$\frac{c}{a}$

Atención

En un triángulo, a mayor ángulo se le opone un mayor lado; para un triángulo rectángulo se concluye entonces:

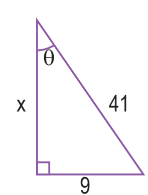


$b > a \wedge b > c$



Ejemplo:

1. Calcula las razones trigonométricas del ángulo θ:



Por el T. Pitágoras:

$x^2 + 9^2 = 41^2$
$x^2 = 41^2 - 9^2$
$x^2 = (41 + 9)(41 - 9)$
$\Rightarrow x = 40$

Por lo tanto:

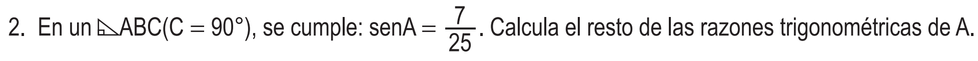
$\text{sen}\theta = \frac{9}{41}$ $\quad \cos\theta = \frac{40}{41}$ $\quad \tan\theta = \frac{9}{40}$

$\csc\theta = \frac{41}{9}$ $\quad \sec\theta = \frac{41}{40}$ $\quad \cot\theta = \frac{40}{9}$

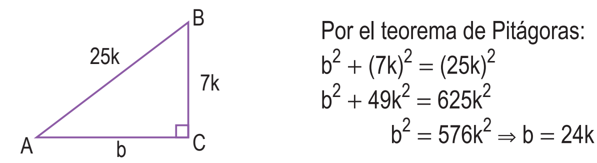
Importante

Si conocemos una razón trigonométrica para un ángulo, podemos calcular las demás.




2. En un ⊿ABC(C = 90°), se cumple: $\text{sen}A = \frac{7}{25}$. Calcula el resto de las razones trigonométricas de A.

Del dato: Sen A $= \frac{7}{25} = \frac{a}{c} \Rightarrow \begin{cases} a = 7k \\ c = 25k \end{cases}$



Por el teorema de Pitágoras:

$b^2 + (7k)^2 = (25k)^2$
$b^2 + 49k^2 = 625k^2$
$b^2 = 576k^2 \Rightarrow b = 24k$

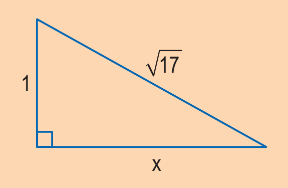
Luego, las razones trigonométricas faltantes serán:

$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$ $\quad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$ $\quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$

$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{25}{24}$ $\quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{25}{7}$

Problemas resueltos

1 Halla x.



Resolución:

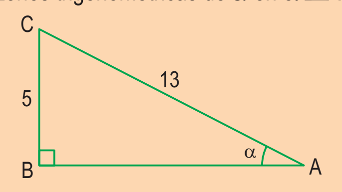
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(\sqrt{17})^2 = 1^2 + x^2$

$17 = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16$

$\therefore x = 4$

2 Calcula las razones trigonométricas de α en el ⊿ABC.



Resolución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿ABC.

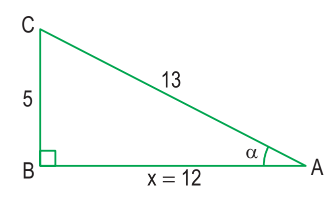
$x^2 + 5^2 = 13^2$

$x^2 = 13^2 - 5^2$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = 12$



Luego, las razones trigonométricas de α serán:

$\text{sen}\alpha = \dfrac{CO}{H} = \dfrac{5}{13}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{CA}{CO} = \dfrac{12}{5}$

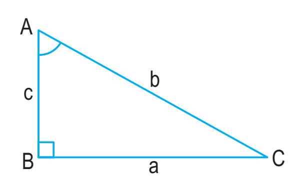
$\cos\alpha = \dfrac{CA}{H} = \dfrac{12}{13}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{H}{CA} = \dfrac{13}{12}$

$\tan\alpha = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{5}{12}$ $\quad \csc\alpha = \dfrac{H}{CO} = \dfrac{13}{5}$

3 En un triángulo ABC ($B = 90°$) .
Calcula: $L = \text{sen}A\csc A + \cos A\sec A$

Resolución:

Graficando tenemos:



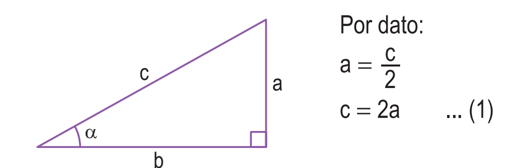
$\Rightarrow L = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{b}{c}\right)$

$\therefore L = 2$

4 En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto de uno de sus ángulos agudos es la mitad de la hipotenusa. Calcula la cotangente de dicho ángulo.

Resolución:

Sea α el ángulo agudo, del enunciado:



Por dato:

$a = \dfrac{c}{2}$

$c = 2a$ ... (1)

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo:

$a^2 + b^2 = c^2$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2):

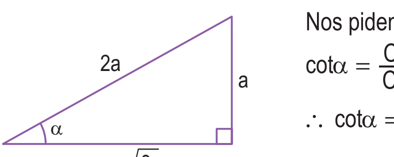
$a^2 + b^2 = (2a)^2$

$b^2 = 4a^2 - a^2$

$b^2 = 3a^2$

$b = a\sqrt{3}$ ... (3)

De (1) y (3):

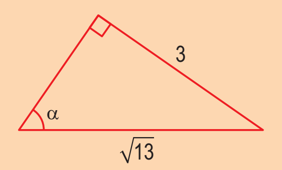


Nos piden $\cot\alpha$:

$\cot\alpha = \dfrac{CA}{CO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a}$

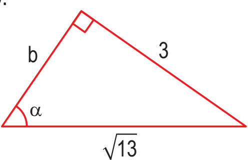
$\therefore \cot\alpha = \sqrt{3}$

5 Halla: $S = \text{sen}\alpha + \cos\alpha$



Resolución:

Hallamos primero b:



Por el teorema de Pitágoras:

$(\sqrt{13})^2 = b^2 + 3^2$

$13 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Luego:

$S = \text{sen}\alpha + \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}} + \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

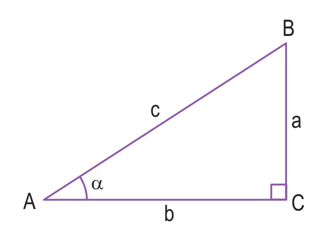
$\therefore S = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En cuanto a las razones trigonométricas de ángulos agudos, se pueden apreciar dos propiedades importantes:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Sea el triángulo rectángulo ABC:



Para el ángulo A, se cumple:	
$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$	$\csc\alpha = \frac{c}{a}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\sec\alpha = \frac{c}{b}$
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\cot\alpha = \frac{b}{a}$

Observación

A las razones recíprocas también se les conoce como "razones inversas".



Se llaman razones trigonométricas recíprocas al par de razones cuyo producto es igual a la unidad. Luego, de las razones trigonométricas en el recuadro, se deduce:

- seno y cosecante son recíprocas.
- coseno y secante son recíprocas.
- tangente y cotangente son recíprocas.



$\text{sen}\alpha.\csc\alpha = 1$
$\cos\alpha.\sec\alpha = 1$
$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

Ejemplos:

Calcula el valor de x en cada caso:

1) $\underbrace{\text{sen}2x.\csc40°}_{=} = 1$; seno y cosecante son recíprocas $\Rightarrow 2x = 40°$

$\therefore\ x = 20°$

2) $\underbrace{\cos3x.\sec(x+40°)}_{=} = 1$; coseno y secante son recíprocas $\Rightarrow 3x = x + 40°$

$2x = 20°$

$\therefore\ x = 10°$

Nota

$\text{sen}\alpha.\csc\theta = 1 \Rightarrow \alpha = \theta$

$\tan x.\cot y = 1 \Rightarrow x = y$

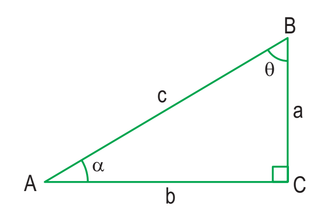
$\cos\beta.\sec\omega = 1 \Rightarrow \beta = \omega$

Para todo:

$\alpha; \theta; x; y; \beta; \omega$ agudos

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Sea el triángulo rectángulo ABC:



Aplicando las definiciones de razones trigonométricas se tiene lo siguiente:

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\theta \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\theta$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{sen}\theta \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\theta$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\theta \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\theta$



Razón	co-razón
seno	coseno
tangente	cotangente
secante	cosecante



Entonces, para dos ángulos complementarios α y θ ($\alpha + \theta = 90°$), se puede plantear:

razón trigonométrica (α) = co-razón trigonométrica (θ)

Ejemplos:

- $\text{sen}40° = \cos(90° - 40°) = \cos50°$
- $\tan10° = \cot(90° - 10°) = \cot80°$
- $\sec20° = \csc(90° - 20°) = \csc70°$
- Si $\tan3x = \underbrace{\text{sen}(z + 50°)}\sec(40° - z)$, calcula: $B = \tan3x + 1$

$\tan3x = \cos[90° - (z + 50°)]\sec(40° - z)$

$\tan3x = \underbrace{\cos(40° - z)\sec(40° - z)}_{1} \Rightarrow \tan3x = 1$

$\Rightarrow B = \tan3x + 1 = 1 + 1 \quad \therefore\ B = 2$

Problemas resueltos

1 Calcula x:
$\text{sen}50°.\csc(x-10°)=1$

Resolución:

Si: $\text{sen}\theta.\csc\beta=1 \Rightarrow \theta=\beta$

Del dato: $50°=x-10°$

$\Rightarrow 50°+10°=x$

$\therefore x=60°$

2 Calcula x:
$\cos\frac{\pi}{5}=\text{sen}x$

Resolución:

Si: $\cos\alpha=\text{sen}\beta \Rightarrow \alpha+\beta=90°$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ rad

Del dato:

$\frac{\pi}{5}+x=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{5\pi-2\pi}{10}=\frac{3\pi}{10}$

$\therefore x=\frac{3\pi}{10}$ rad

3 Resuelve:
$\tan(3x-8°).\cot(2x+4°)=1$

Resolución:

Si: $\tan\alpha.\cot\beta=1 \Rightarrow \alpha=\beta$

Entonces: $3x-8°=2x+4°$

$3x-2x=4°+8°$

$\therefore x=12°$

4 Calcula x:
$\tan 2x.\cot(\frac{\pi}{5}-x)=1$

Resolución:

Si: $\tan\alpha.\cot\beta=1 \Rightarrow \alpha=\beta$

Del dato:

$2x=\frac{\pi}{5}-x$

$\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{5} \qquad \therefore x=\frac{\pi}{15}$ rad

5 Halla x.
$\cos10°+2x=\text{sen}80°+20$

Resolución:

Si: $\cos\alpha=\text{sen}\beta \Rightarrow \alpha+\beta=90°$

Luego:

$\cos10°+2x=\underbrace{\text{sen}80°}+20$

$\Rightarrow \cos10°+2x=\cos10°+20$

$2x=20 \Rightarrow x=10$

6 Calcula:
$M=\frac{\text{sen}40°}{\cos50°}+\frac{\tan35°}{\cot55°}$

Resolución:

Como: $\text{sen}40°=\cos50° \wedge \tan35°=\cot55°$

Entonces:

$M=\frac{\text{sen}40°}{\text{sen}40°}+\frac{\tan35°}{\tan35°}$

$M=1+1 \Rightarrow M=2$

7 Calcula:
$M=\left[\frac{\cos10°}{\text{sen}80°}+\frac{\sec70°}{\csc20°}\right]^3$

Resolución:

Como: $\cos10°=\text{sen}80°$, y

$\csc20°=\sec70°$

Entonces:

$M=\left[\frac{\text{sen}80°}{\text{sen}80°}+\frac{\sec70°}{\sec70°}\right]^3$

$M=[1+1]^3 \Rightarrow M=2^3=8$

8 Calcula:
$E=\frac{\cos\alpha.\sec\alpha+7}{1+\tan\alpha.\cot\alpha}$

Resolución:

como: $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \wedge \tan\alpha.\cot\alpha=1$

Luego:

$E=\frac{1+7}{1+1}=\frac{8}{2} \Rightarrow E=4$

9 Determina el valor de:
$E=\tan1°\tan2°\tan3°...\tan88°\tan89°$

Resolución:

$E=\underbrace{\tan1°\tan2°\tan3°...\tan88°\tan89°}_{\text{Hay 89 términos}}$

Además:

$\tan89°=\cot1°$

$\tan88°=\cot2°$

$\tan87°=\cot3°$

$\vdots$

$\tan46°=\cot44°$

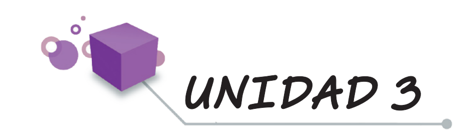
Reemplazando en E:

$E=\tan1°\tan2°...\tan44°\tan45°\cot44°...\cot2°\cot1°$

Agrupando convenientemente:

$E=\underbrace{(\tan1°\cot1°)}_{1}\underbrace{(\tan2°\cot2°)}_{1}...\underbrace{(\tan44°\cot44°)}_{1}\tan45°$

$\therefore E=\tan45°=1$





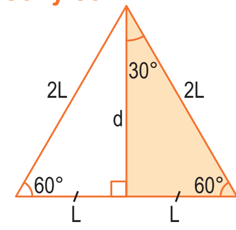
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Se les dice notables a los triángulos cuya proporción de lados y/o las medidas de sus ángulos interiores son conocidas.

TRIÁNGULOS EXACTOS

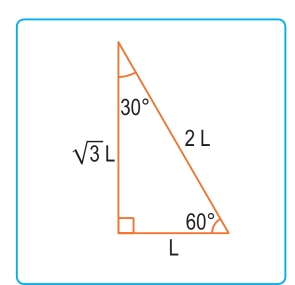
La relación de proporción entre sus lados y la medida de sus ángulos se determinan a partir de polígonos regulares.

De 30° y 60°

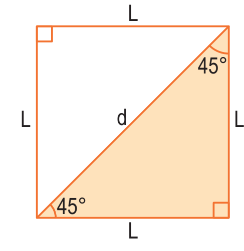


Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 + L^2 = (2L)^2$$
$$d^2 = 3L^2$$
$$d = \sqrt{3}\,L$$

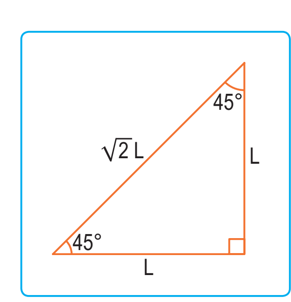


De 45°



Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = L^2 + L^2$$
$$d^2 = 2L^2$$
$$d = \sqrt{2}\,L$$

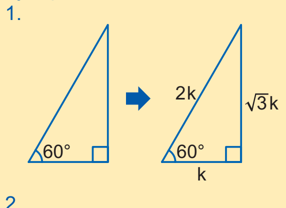


Observación

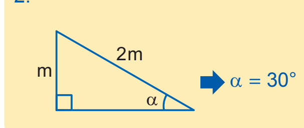
Los triángulos rectángulos notables son una forma práctica para encontrar la relación de proporción de lados, conocido sus ángulos interiores o viceversa.

Ejemplos:

1.



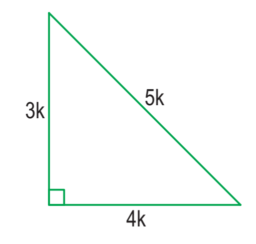
2.

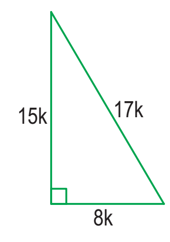


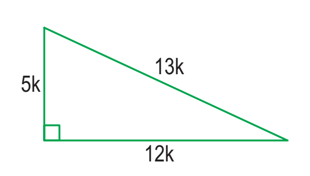


TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

Son aquellos triángulos rectángulos cuya medida de sus lados son valores enteros.







Atención

Al conjunto de 3 números naturales que cumplen con el teorema de Pitágoras se conoce como **terna pitagórica.**

Ejemplo:

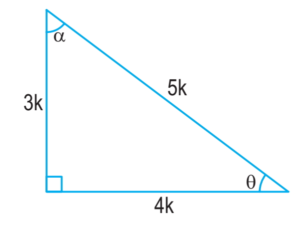
$3^2 + 4^2 = 5^2$

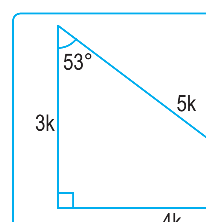
3; 4; 5: terna pitagórica

TRIÁNGULOS APROXIMADOS

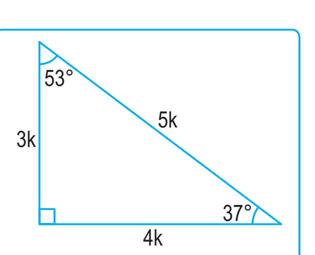
Son aquellos triángulos rectángulos que, además de la relación entre sus lados, sus ángulos agudos se aproximan a valores enteros.

De 37° y 53°



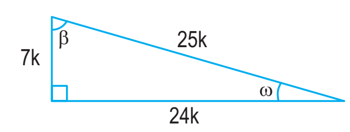


$$\alpha = 53°{,}13 \approx 53°$$
$$\theta = 36°{,}87 \approx 37°$$

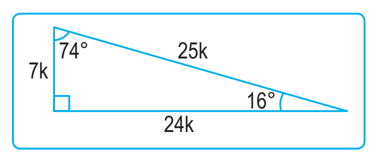




De 16° y 74°

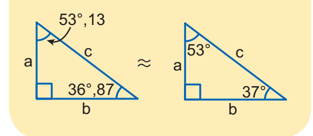


$\beta = 73°,74 \approx 74°$
$\omega = 16°,26 \approx 16°$

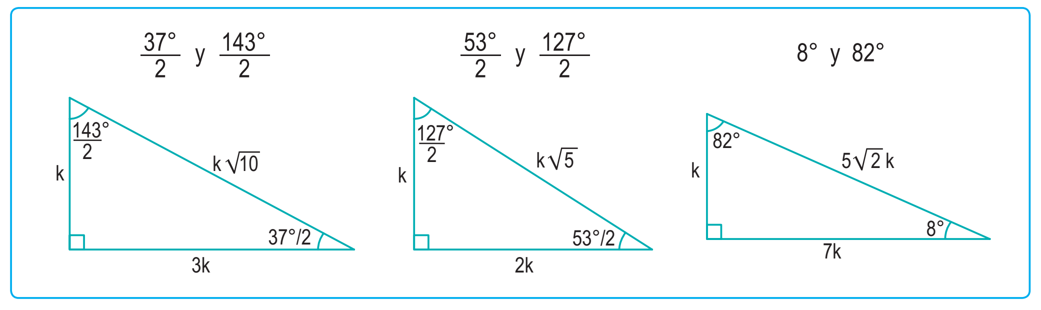


Recuerda

En la práctica, para mediciones o cálculos pequeños, a los ángulos aproximados se les considera como valores exactos.

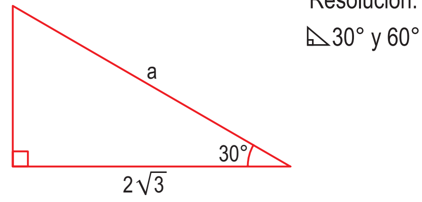


OTROS TRIÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS



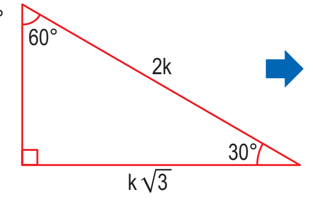
Ejemplos:

1. Calcula a.



Resolución:

 30° y 60°



Del gráfico:

$k\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow k = 2$

$a = 2k = 2(2)$

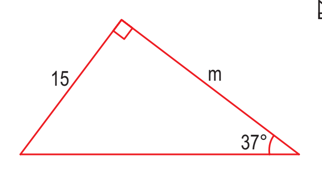
$\therefore\ a = 4$



Observación

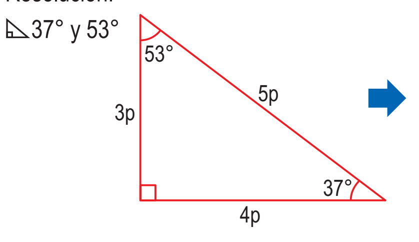
Estos triángulos se obtienen a partir de otros triángulos notables.

2. Calcula m.



Resolución:

37° y 53°



Del gráfico:

$3p = 15 \Rightarrow p = 5$

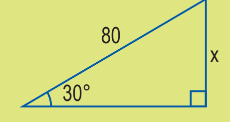
$m = 4p = 4(5)$

$\therefore\ m = 20$

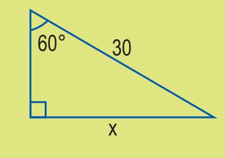
EFECTUAR



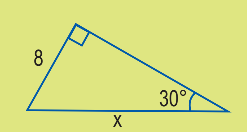
1. Halla x.



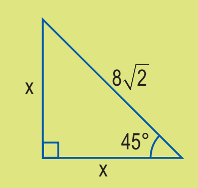
2. Halla x.



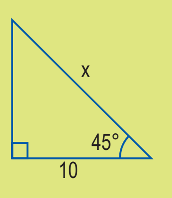
3. Halla x.



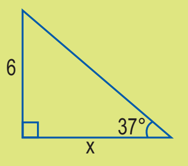
4. Halla x.



5. Halla x.

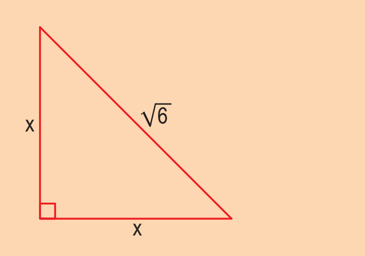


6. Halla x.



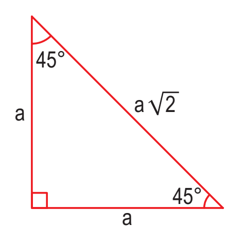
Problemas resueltos

1 Halla x.



Resolución:

De triángulo de 45° tenemos:



$\Rightarrow a\sqrt{2} = \sqrt{6}$

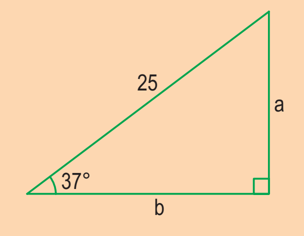
$a\sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

$a = \sqrt{3}$

Luego: $x = a$

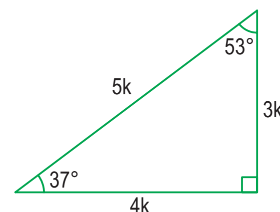
$\therefore\ x = \sqrt{3}$

2 Calcula (a + b).



Resolución:

Del triángulo de 37° y 53° tenemos:



$\Rightarrow 5k = 25$

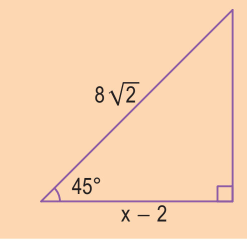
$k = 5$

Luego:

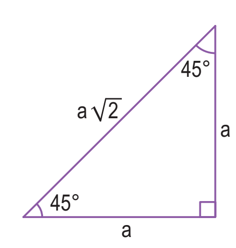
$b = 4k = 20 \wedge a = 3k = 15$

Por lo tanto: $a + b = 35$

3 Calcula x.



Resolución:



Del triángulo de 45° tenemos:

$a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

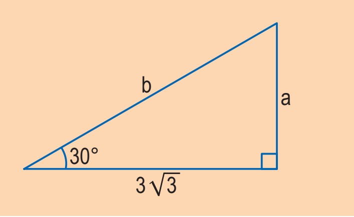
$a = 8$

Luego:

$x - 2 = 8$

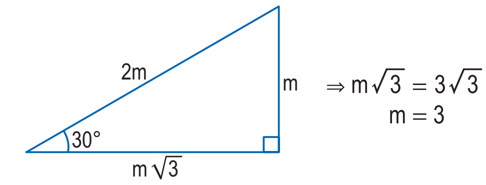
$\therefore\ x = 10$

4 Calcula (b – a).



Resolución:

Del triángulo de 30° y 60° tenemos:



$\Rightarrow m\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

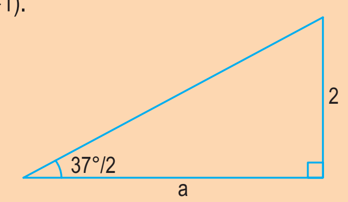
$m = 3$

Luego:

$a = m = 3\ \wedge\ b = 2m = 2 . 3 = 6$

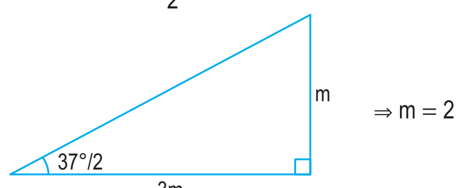
Por lo tanto: $b - a = 3$

5 Calcula $(a^2 + 1)$.



Resolución:

Del triángulo de $\frac{37°}{2}$ tenemos:

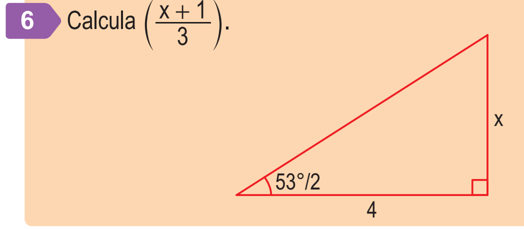


$\Rightarrow m = 2$

Luego: $a = 3m = 3 . 2 = 6$

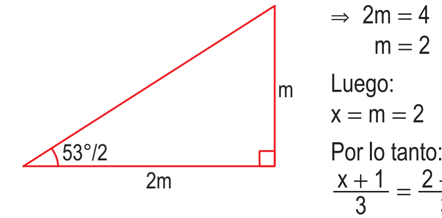
Entonces: $a^2 + 1 = 6^2 + 1 = 37$

6 Calcula $\left(\frac{x+1}{3}\right)$.



Resolución:

Del triángulo de $\frac{53°}{2}$ tenemos:



$\Rightarrow 2m = 4$

$m = 2$

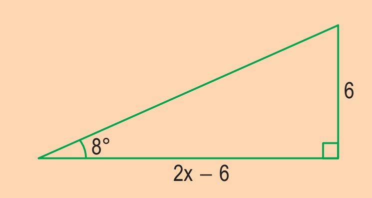
Luego:

$x = m = 2$

Por lo tanto:

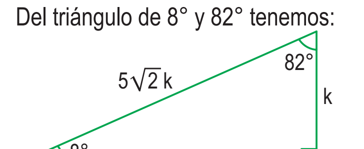
$\frac{x+1}{3} = \frac{2+1}{3} = 1$

7 Halla x.



Resolución:

Del triángulo de 8° y 82° tenemos:



$k = 6$

Luego:

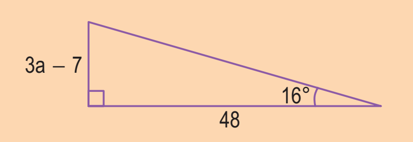
$2x - 6 = 7k$

$2x - 6 = 7 . 6$

$2x = 42 + 6$

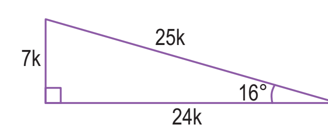
$\therefore\ x = 24$

8 Calcula a.



Resolución:

Del triángulo de 16° y 74° tenemos:



$24k = 48 \Rightarrow k = 2$

Luego:

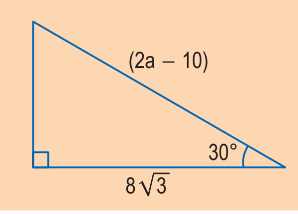
$3a - 7 = 7k$

$3a - 7 = 7 . 2$

$3a = 21$

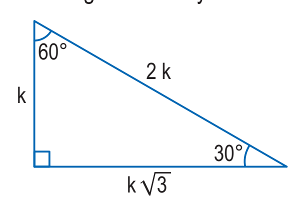
$\therefore a = 7$

9 Halla a.



Resolución:

Del triángulo de 30° y 60° tenemos:



$\Rightarrow k\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$k = 8$

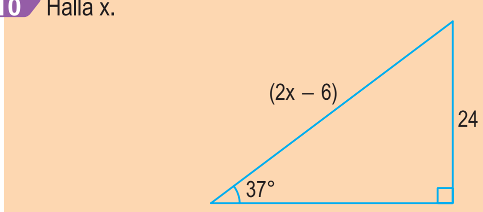
Luego: $(2a - 10) = 2k$

$2a - 10 = 2(8)$

$2a = 26$

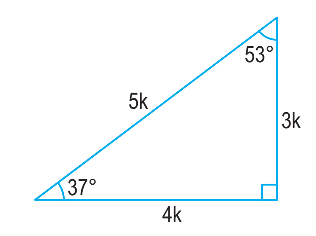
$\therefore a = 13$

10 Halla x.



Resolución:

Del triángulo de 37° y 53° tenemos:



$\Rightarrow 3k = 24$

$k = 8$

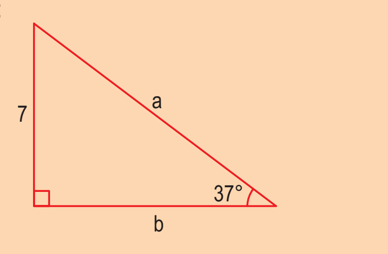
Luego: $(2x - 6) = 5k$

$\Rightarrow (2x - 6) = 5(8)$

$2x = 46$

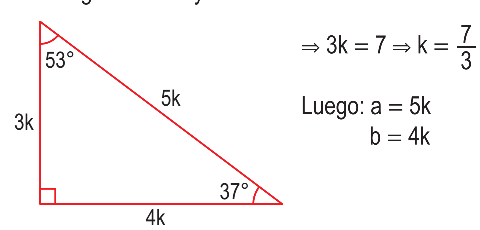
$\therefore x = 23$

11 Halla (a + b), en:



Resolución:

Del triángulo de 37° y 53° tenemos:



$\Rightarrow 3k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{3}$

Luego: $a = 5k$

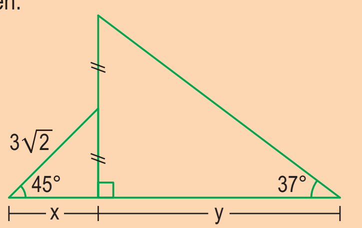
$b = 4k$

Piden: $(a + b) = 5k + 4k = 9k$

$a + b = 9k = 9\left(\frac{7}{3}\right) = 21$

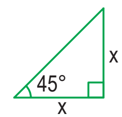
$\therefore\ a + b = 21$

12 Halla (x + y) en:



Resolución:

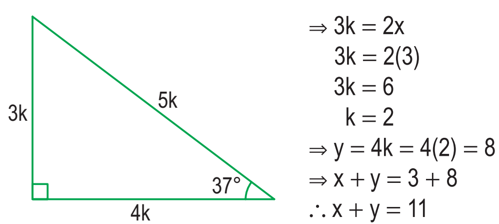
Del triángulo de 45° tenemos:



$x\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$x = 3$

Del triángulo de 37° y 53° tenemos:



$\Rightarrow 3k = 2x$

$3k = 2(3)$

$3k = 6$

$k = 2$

$\Rightarrow y = 4k = 4(2) = 8$

$\Rightarrow x + y = 3 + 8$

$\therefore x + y = 11$

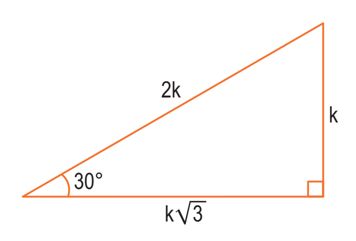


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

T

Las razones trigonométricas de estos ángulos se obtienen a partir de triángulos rectángulos notables donde las medidas de sus lados están relacionadas en una determinada proporción. Así tenemos:

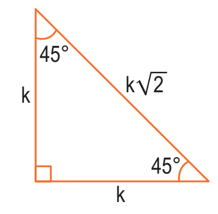
Triángulo rectángulo de 30° y 60°



RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$



Triángulo rectángulo de 45°

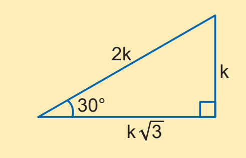


RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Recuerda

Las razones trigonométricas son las razones entre los lados de un triángulo rectángulo.

Ejemplo: sen30°



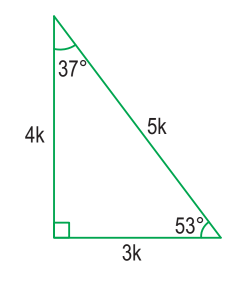
$\text{sen}30° = \frac{k}{2k}$

$\text{sen}30° = \frac{1}{2}$

ÁNGULOS APROXIMADOS

Anteriormente, definimos triángulos rectángulos notables aproximados cuyos ángulos no son enteros exactos.

Triángulo rectángulo de 37° y 53°

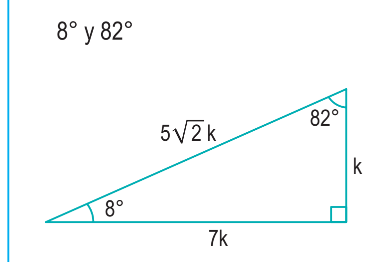


RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$



Otros ángulos notables

8° y 82°

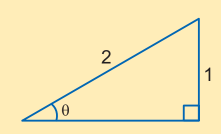


RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
8°	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{7}$	7	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$	$5\sqrt{2}$
82°	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	7	$\frac{1}{7}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$

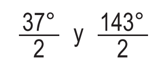
Recuerda

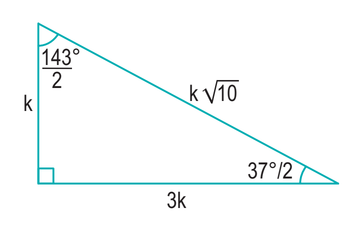
Si se conoce el valor de una razón trigonométrica de un ángulo notable, es posible calcular dicho ángulo.

Ejemplo:
Calcula θ si es agudo donde:
$\text{sen}\theta = 1/2$
Resolución:
Graficando observamos:
⊿notable de 30° y 60°.
$\therefore \theta = 30°$



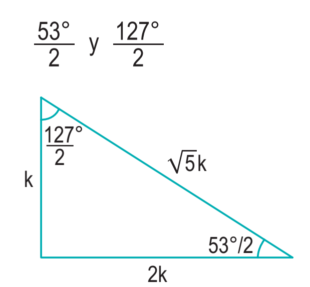






RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
$\frac{37°}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{10}$
$\frac{143°}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	3	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\frac{53°}{2}$ y $\frac{127°}{2}$

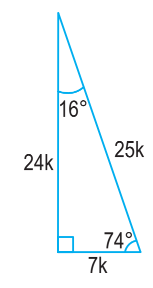


RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
$\frac{53°}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$
$\frac{127°}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$

Conclusión

En un triángulo rectángulo notable se pueden calcular las razones trigonométricas de sus ángulos interiores dado que la relación de proporción entre sus lados es conocida.

Ejemplo:
Calcula las razones trigonométricas de los ángulos en el triángulo rectángulo notable de 16° y 74°.



RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
16°	$\frac{7k}{25k}=\frac{7}{25}$	$\frac{24k}{25k}=\frac{24}{25}$	$\frac{7k}{24k}=\frac{7}{24}$	$\frac{24k}{7k}=\frac{24}{7}$	$\frac{25k}{24k}=\frac{25}{24}$	$\frac{25k}{7k}=\frac{25}{7}$
74°	$\frac{24k}{25k}=\frac{24}{25}$	$\frac{7k}{25k}=\frac{7}{25}$	$\frac{24k}{7k}=\frac{24}{7}$	$\frac{7k}{24k}=\frac{7}{24}$	$\frac{25k}{7k}=\frac{25}{7}$	$\frac{25k}{24k}=\frac{25}{24}$

Nota

La razón de un ángulo es igual a su co-razón si estos suman 90°:

$\text{RT}(\alpha) = \text{CO-RT}(\beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90°$

sen30° = cos60°
sec53° = csc37°
tan45° = cot45°

Ejemplos:
RT recíprocas:

$\text{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

EFECTUAR



1. Calcula:
   $A = \text{sen}30° + \tan 53°$
2. Calcula:
   $M = 5\text{sen}53° + \sqrt{3}\,\text{sen}60°$
3. Halla:
   $T = \text{sen}^2 45° + \text{sen}30°$
4. Halla:
   $M = \text{sen}37° \,.\, \cos 45° \,.\, \tan 60°$
5. Halla:
   $A = \sec 60° + \csc 53°$
6. Halla:
   $M = \sqrt{5}\left(\sqrt{\text{sen}53° + \cos 53° + \frac{1}{5}}\right)$
7. Halla:
   $T = 10\text{sen}30° + 6\text{sen}45°\cos 45°$
8. Calcula:
   $A = \sqrt{\text{sen}37° + \cos 37° + \frac{3}{5}}$
9. Calcula:
   $T = \csc 37° + \sec 45°$

Problemas resueltos

1 Calcula M.
$M = 7\tan 8° + 2$

Resolución:

$M = 7 \cdot \frac{1}{7} + 2$

$M = 1 + 2$

$\therefore\ M = 3$

2 Halla el valor de A.
$A = \text{sen}30° + \tan 53°$

Resolución:

$A = 1/2 + 4/3$

$\therefore\ A = 11/6$

3 Calcula:
$M = \csc^2 45° \cdot \sec 60° \cdot \tan 37°$

Resolución:

$M = (\sqrt{2})^2 (2)\left(\frac{3}{4}\right)$

$M = 4\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore\ M = 3$

4 Efectúa:
$K = \sqrt{3}\csc 60° + \sqrt{2}\,\text{sen}45° - 3$

Resolución:

$K = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 3$

$K = 2 + 1 - 3$

$\therefore K = 0$

5 Si $\alpha = 15°$, calcula:
$L = \text{sen}2\alpha . \text{sen}3\alpha . \text{sen}4\alpha$

Resolución:

$L = \text{sen}30° . \text{sen}45° . \text{sen}60°$

$L = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore L = \frac{\sqrt{6}}{8}$

6 Calcula B.
$B = 6\tan\frac{37°}{2} + \cot\frac{53°}{2} - \frac{\tan 82°}{7}$

Resolución:

$B = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 - \frac{7}{7}$

$B = 2 + 2 - 1$

$\therefore\ B = 3$

7 Halla el valor de Q.
$Q = \sqrt{\text{sen}16° - \frac{2}{5}\text{sen}37°}$

Resolución:

$Q = \sqrt{\frac{7}{25} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}}$

$Q = \sqrt{\frac{7}{25} - \frac{6}{25}}$

$\therefore\ Q = 1/5$

8 Efectúa:
$P = [\tan 60° \cdot \sec 45°]^2 + 18\tan 53°$

Resolución:

$P = [\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}]^2 + 18 \cdot \frac{4}{3}$

$P = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4$

$\therefore P = 30$

9 Calcula:
$H = 4^{\text{sen}30°} + 3^{\sec 60°}$

Resolución:

$H = 4^{\frac{1}{2}} + 3^2$

$H = 2 + 9$

$\therefore H = 11$

10 Calcula:
$R = \sqrt{8\sec 60° \cdot \tan 45° + 3\tan^2 60°}$

Resolución:

$R = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2}$

$R = \sqrt{16 + 9}$

$\therefore R = 5$

11 Calcula:
$M = \sqrt{8\tan 37° + \sqrt{3}\tan 30° + \sec^2 45°}$

Resolución:

$M = \sqrt{8 \cdot \frac{3}{4} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{2})^2}$

$M = \sqrt{6 + 1 + 2}$

$\therefore M = 3$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Es el procedimiento mediante el cual se calculan los lados desconocidos de un triángulo rectángulo, en función de un lado conocido y de un ángulo agudo, también conocido. El criterio a emplear es el siguiente:

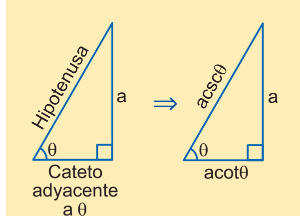
$$\frac{\text{Lado desconocido}}{\text{Lado conocido}} = \text{RT (ángulo conocido)}$$

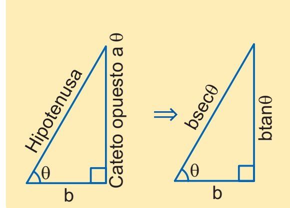
Atención

Resolver un triángulo rectángulo es calcular sus lados, si se conocen un lado y un ángulo agudo.

Resuelve: Resolución:

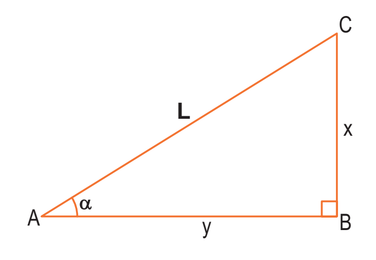
H, θ, Cateto opuesto a θ, Cateto adyacente a θ ⇒ H, θ, Hsenθ, Hcosθ







Se tienen los siguientes casos:
Conocidos el ángulo agudo y la hipotenusa del triángulo.

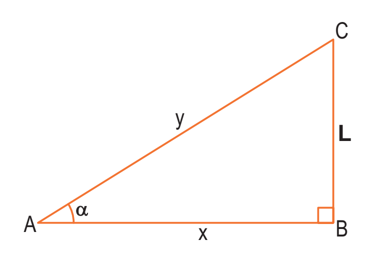


Aplicando:

$\frac{x}{L} = \text{sen}\alpha \Rightarrow x = L\text{sen}\alpha$

$\frac{y}{L} = \cos\alpha \Rightarrow y = L\cos\alpha$

Conocidos el ángulo agudo y el cateto opuesto a dicho ángulo.

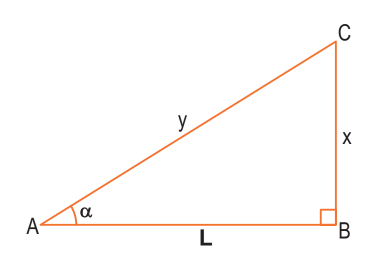


Aplicando:

$\frac{x}{L} = \cot\alpha \Rightarrow x = L\cot\alpha$

$\frac{y}{L} = \csc\alpha \Rightarrow y = L\csc\alpha$

Conocidos el ángulo agudo y el cateto adyacente a dicho ángulo.



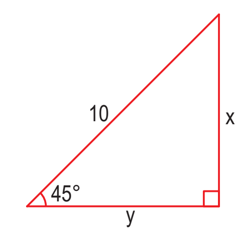
Aplicando:

$\frac{x}{L} = \tan\alpha \Rightarrow x = L\tan\alpha$

$\frac{y}{L} = \sec\alpha \Rightarrow y = L\sec\alpha$

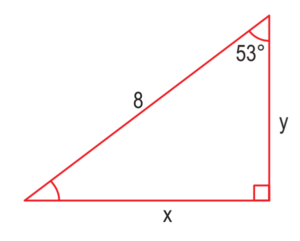
Ejemplos:
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

1.er caso



$x = 10\text{sen}45° = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}$

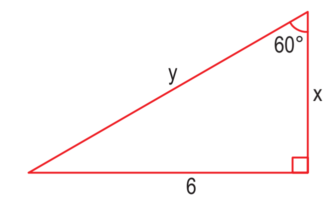
$y = 10\cos45° = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}$



$x = 8\text{sen}53° = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$

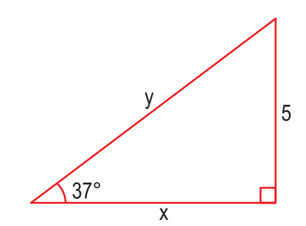
$y = 8\cos53° = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$

2.° caso



$x = 6\cot60° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

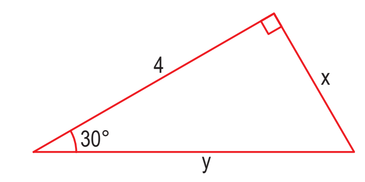
$y = 6\csc60° = 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$



$x = 5\cot37° = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

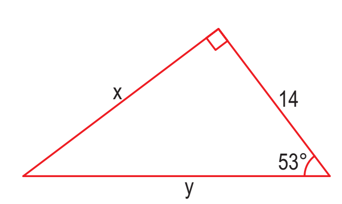
$y = 5\csc37° = 5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$

3.^{er} caso



$x = 4\tan30° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$y = 4\sec30° = 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



$x = 14\tan53° = 14 \times \frac{4}{3} = \frac{56}{3}$

$y = 14\sec53° = 14 \times \frac{5}{3} = \frac{70}{3}$

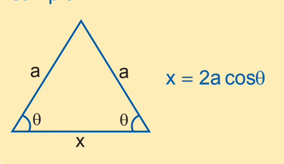
Observación

De los ejemplos mostrados es notorio que cuando se nos da un triángulo rectángulo, por lo menos uno de los datos resulta ser un lado.



Atención

En un triángulo isósceles se cumple:



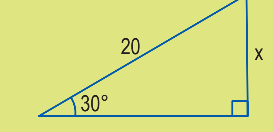




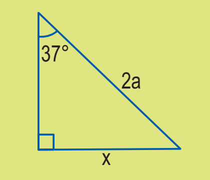
EFECTUAR



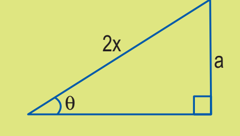
1. Halla x.



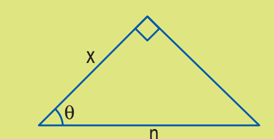
2. Halla x.



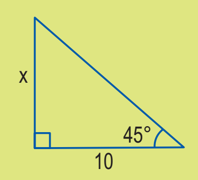
3. Halla x.



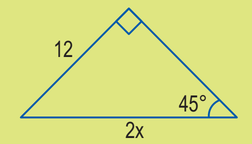
4. Halla x.



5. Halla x.

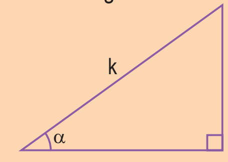


6. Halla x.



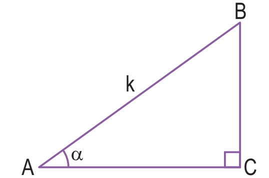
Problemas resueltos

1 Halla el área del siguiente triángulo:



Resolución:

Del gráfico:

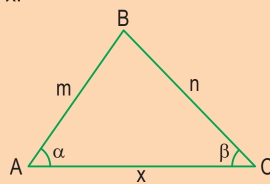


BC = ksenα
AC = kcosα

Área de un triángulo:

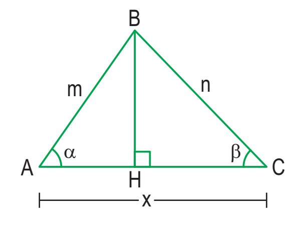
$$\frac{AC.BC}{2} = \frac{k\cos\alpha\,.\,k\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \frac{k^2\operatorname{sen}\alpha\,.\cos\alpha}{2}$$

2 En la figura, halla x:



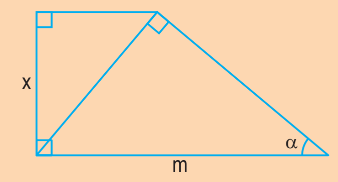
Resolución:

Del gráfico:



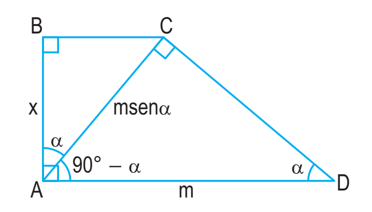
Trazamos la altura $\overline{BH}$.
Se conocen el ángulo agudo y la hipotenusa, entonces:
AH = mcosα
HC = ncosβ
Piden x:
x = AH + HC
x = mcosα + ncosβ

3 Halla x en función de α y m.



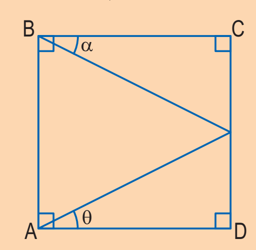
Resolución:

En el gráfico:

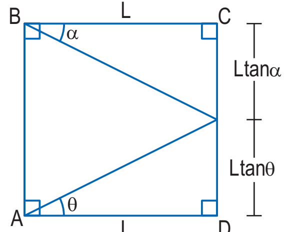


En el ◺ACD (conocidos el ángulo agudo y la hipotenusa):
AC = msenα
En el ◺ABC (conocidos el ángulo agudo y la hipotenusa (msenα)):
∴ x = msenαcosα

4 Siendo ABCD un cuadrado, halla: tanα + tanθ

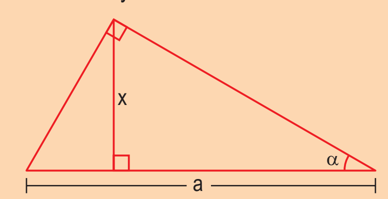


Resolución:

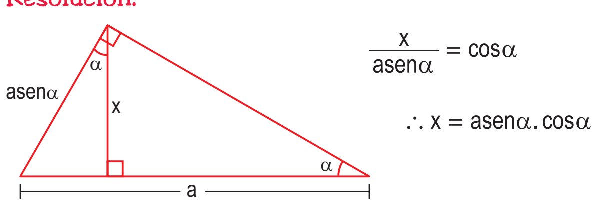


Sea el cuadrado de lado L:
L = Ltanα + Ltanθ
∴ tanα + tanθ = 1

5 Halla x en función de α y a.



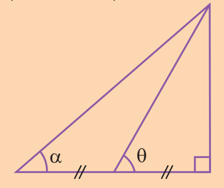
Resolución:



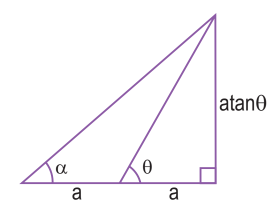
$$\frac{x}{a\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha$$

∴ x = asenα.cosα

6 Del gráfico adjunto, halla cotθ, si: tanα = 1/4



Resolución:



$$\cot\alpha = \frac{2a}{a\tan\theta} = \frac{2}{\tan\theta}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} = 2\cot\theta \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

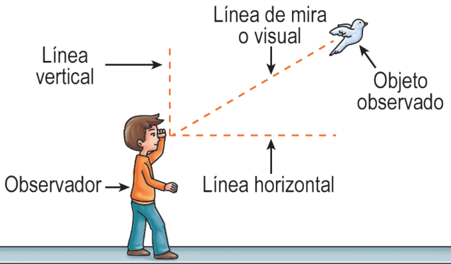
∴ cotθ = 2

ÁNGULOS VERTICALES

T

CONCEPTOS BÁSICOS

Línea vertical: es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada.
Línea horizontal: es toda aquella línea perpendicular a la vertical.
Plano vertical: es aquel que contiene a toda línea vertical.
Línea de mira: llamada también **línea visual**, es aquella línea recta imaginaria que une el ojo del observador con el objeto observado.



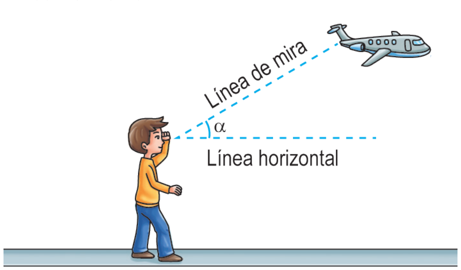
- Cuando no se menciona la altura del observador se considera un punto.

ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical formados por la línea de mira o visual y la línea horizontal que parten de la vista del observador. Los ángulos verticales pueden ser:

Ángulo de elevación

Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

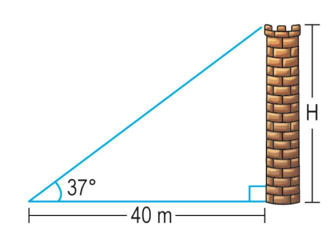


α: ángulo de elevación.

$0° < \alpha < 90°$

Ejemplo:
Desde un punto situado a 40 m de la base de una torre, se observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación de 37°. Calcula la altura de la torre.

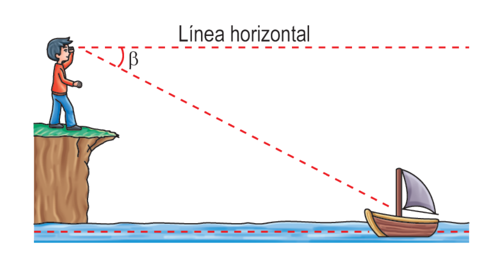
Resolución:
Sea "H" la altura de la torre:



- Del gráfico: $\tan 37° = H/40 \Rightarrow H = 40\tan 37°$
  $H = 40(3/4)$
  $H = 30$ m

Ángulo de depresión

Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.

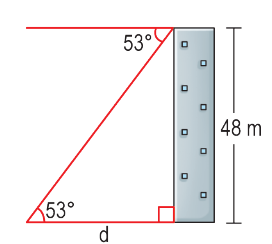


β: ángulo de depresión.

$0° < \beta < 90°$

Ejemplo:
Desde lo alto de un edificio de 48 m de altura se ve un objeto en tierra con un ángulo de depresión de 53°. ¿A qué distancia de la base del edificio se encuentra el objeto?

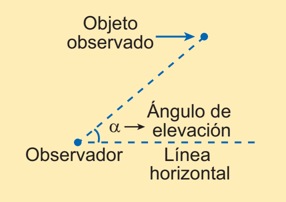
Resolución:
Sea "d" la distancia:



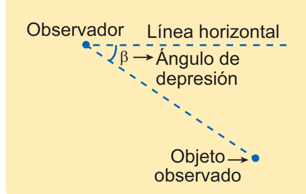
- Del gráfico: $\cot 53° = d/48 \Rightarrow d = 48\cot 53°$
  $d = 48(3/4)$
  $d = 36$ m

Atención

- El ángulo es de elevación, cuando el objeto observado está por encima de la línea horizontal.



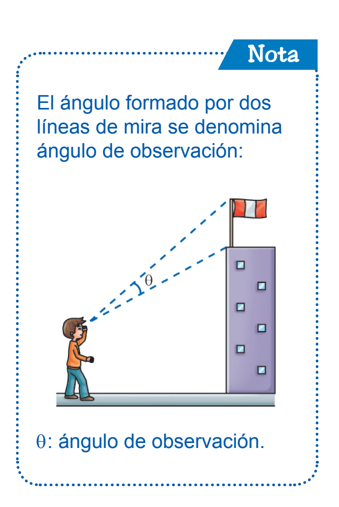
- El ángulo es de depresión, cuando el objeto observado está por debajo de la línea horizontal.





Nota

El ángulo formado por dos líneas de mira se denomina ángulo de observación:



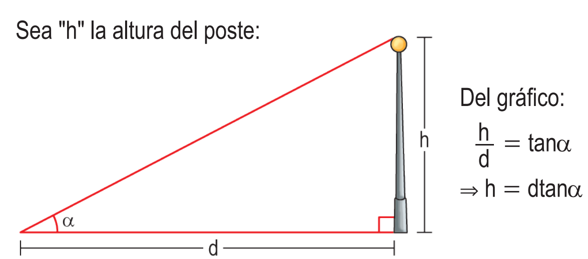
θ: ángulo de observación.

Problemas resueltos

1 Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación α, si el punto de observación está a una distancia **d** de la base del poste, ¿cuál es la altura del poste?

Resolución:

Sea "h" la altura del poste:



Del gráfico:

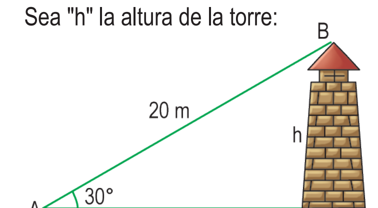
$\frac{h}{d} = \tan\alpha$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha$

2 La línea de mira y el ángulo de elevación desde un punto en tierra hacia la parte más alta de una torre son 20 m y 30°, respectivamente. Calcula la altura de la torre.

Resolución:

Sea "h" la altura de la torre:



$h = 20\text{sen}30°$

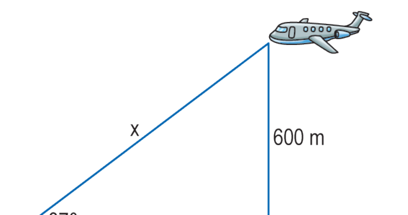
$h = 20\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore h = 10 \text{ m}$

3 Una persona observa un avión, que vuela a 600 m de altura, con un ángulo de elevación de 37°. ¿Qué distancia hay en ese momento entre el avión y la persona?

Resolución:

Sea "x" la distancia entre el avión y la persona:



$x = 600\csc 37°$

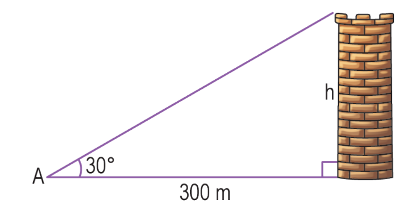
$x = 600\left(\frac{5}{3}\right)$

$\therefore x = 1000 \text{ m}$

4 Desde el punto A situado a 300 m de la base de una torre se observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación de 30°. Calcula la altura de la torre.

Resolución:

Sea "h" la altura de la torre:



$\frac{h}{300} = \tan 30°$

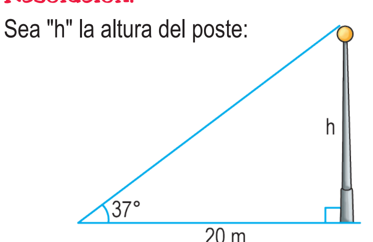
$h = 300\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore h = 100\sqrt{3} \text{ m}$

5 A 20 m del pie de un poste, el ángulo de elevación para lo alto del mismo es de 37°. ¿Cuál es la altura del poste?

Resolución:

Sea "h" la altura del poste:



$h = 20\tan 37°$

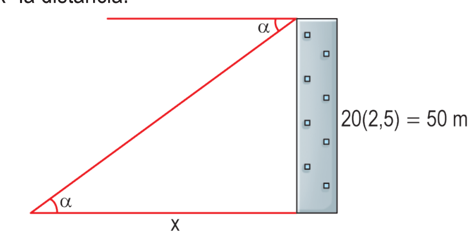
$h = 20\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore h = 15 \text{ m}$

6 Desde lo alto de un edificio de 20 pisos cada uno de 2,5 m de altura; se divisa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión "α" ($\tan\alpha = 1{,}25$). ¿A qué distancia del edificio se halla el objeto?

Resolución:

Sea "x" la distancia:

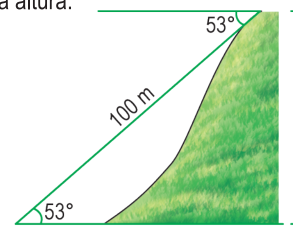


Del gráfico $\tan\alpha = \frac{50}{x} \Rightarrow \frac{125}{100} = \frac{50}{x} \Rightarrow x = 40 \text{ m}$

7 Desde la parte superior de una colina se divisa con ángulo de depresión de 53° a un punto del suelo. Si la línea visual mide 100 m. Calcula la altura a la que se encuentra el observador.

Resolución:

Sea "h" la altura:



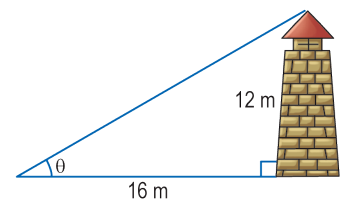
$h = 100\,\text{sen}53°$

$h = 100 \cdot \frac{4}{5}$

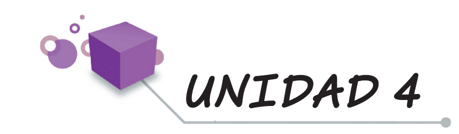
$\therefore h = 80 \text{ m}$

8 Desde un punto en tierra ubicado a 16 m de una torre de 12 m de altura, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación "θ". ¿Cuál es el valor de θ?

Resolución:



Del gráfico: $\tan\theta = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$



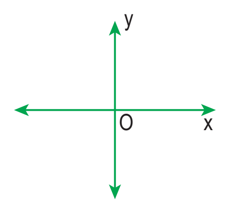


SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Es un sistema que utiliza pares de números llamados coordenadas para ubicar un punto en un plano cartesiano.

PLANO CARTESIANO

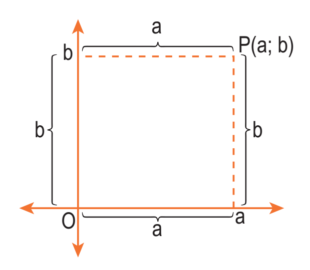
El plano cartesiano se forma al cortarse de manera perpendicular dos rectas; la recta horizontal se llama eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje de las ordenadas. Además, el punto de intersección se denomina origen.



Donde:
x: eje de las abscisas.
y: eje de las ordenadas.
O: origen.

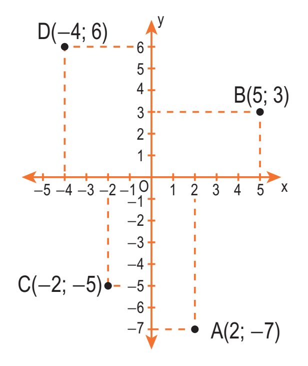
UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

A todo punto P del plano cartesiano se le puede asociar un par ordenado.
Dado el punto (a; b), su ubicación en el plano cartesiano será:



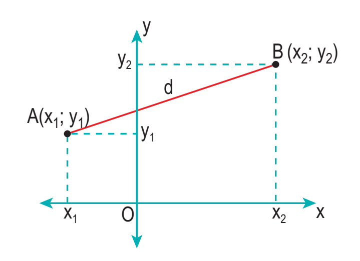
Donde:
a y b son las componentes de P.
a: abscisa de P.
b: ordenado de P.

Ejemplo:
Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos: A(2; –7); B(5; 3); C(–2; –5) y D(–4; 6).



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

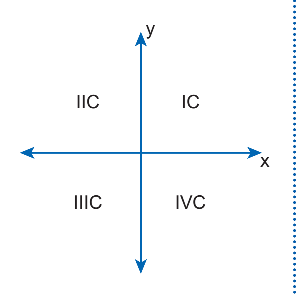
Dados los puntos A y B, podemos calcular la distancia entre ellos, de la siguiente forma:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Nota

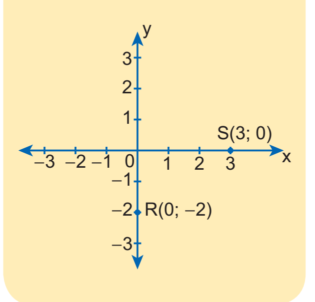
El plano cartesiano a su vez se divide en 4 regiones o cuatro cuadrantes.



IC : primer cuadrante.
IIC : segundo cuadrante.
IIIC : tercer cuadrante.
IVC : cuarto cuadrante.

Observación

Dados S(3; 0) y R(0; –2), su ubicación en el plano cartesiano será:



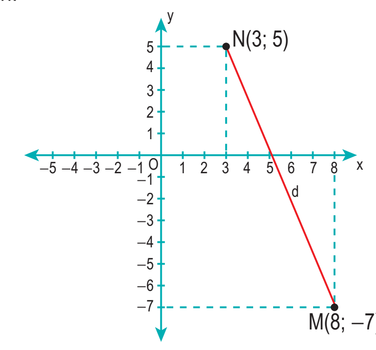


Atención

A cada punto del plano le corresponde uno y solo un par ordenado de números, donde existe primera componente y segunda componente.

Ejemplo:
Calcula la distancia entre los puntos N(3; 5) y M(8; –7)

Resolución:



$$d = \sqrt{(3-8)^2 + (5-(-7))^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

$$d = \sqrt{169}$$

$$d = 13$$

Nota

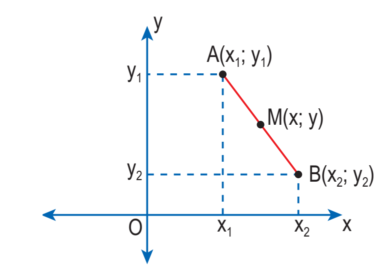
La distancia entre dos puntos A y B la podemos denotar así:

d(A; B)



PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado el segmento AB, que tiene como extremos a los puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, hallaremos el punto medio de dicho segmento utilizando la siguiente fórmula:



Las coordenadas del punto medio M serán:

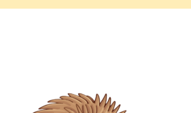
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Luego, el punto medio es: M(x; y)

Ten en cuenta

Dado M punto medio del segmento AB, se cumple:

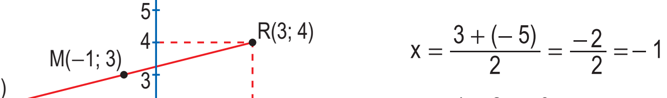
d(A; M) = d(M; B)



Ejemplo:
Halla las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos a los puntos R(3; 4) y S(–5; 2).

Resolución:





$$x = \frac{3 + (-5)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego, el punto medio de $\overline{SR}$ es: M(–1; 3)

Observación

El radio vector se obtiene calculando la distancia del origen O que tiene como coordenadas (0, 0) y al punto P(a; b).

Es decir:

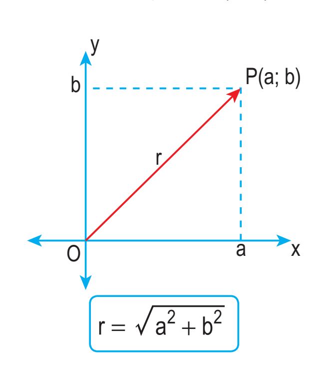
$d(O; P) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$

$d(O; P) = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d(O; P) = r$

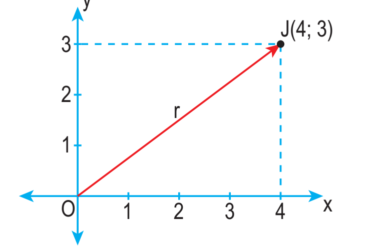
RADIO VECTOR

Es la distancia desde cualquier punto al origen del plano cartesiano.
El radio vector de un punto P(a; b) está dado por:



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:
Calcula el radio vector del punto J(4; 3).



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

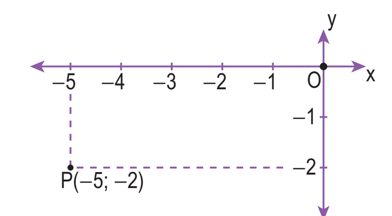
Problemas resueltos

T

1 ¿A qué cuadrante pertenece el punto P(–5; –2)?

Resolución:

Graficamos y observamos:

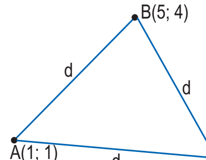


$\therefore$ El punto P $\in$ IIIC.

2 Si dos vértices seguidos de un triángulo equilátero son A(1; 1) y B(5; 4). Calcula el perímetro del triángulo.

Resolución:

Primero hallamos la distancia entre los puntos dados:



$d = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2}$

$d = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$d = 5$

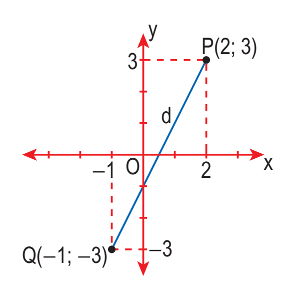
En un triángulo equilátero los tres lados miden igual.

$\therefore$ Perímetro del triángulo $= 3 \times 5 = 15$

3 Halla la distancia entre los puntos P(2; 3) y Q(–1; –3).

Resolución:

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano:



Hallamos la distancia:

$d = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$

$\therefore\ d = 3\sqrt{5}$

4 Halla k si la distancia entre los puntos M(k; 1) y N(2; –5) es 10.

Resolución:

$d(M; N) = \sqrt{(k-2)^2 + (1-(-5))^2} = 10$

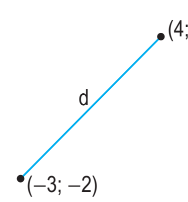
$10^2 = (k-2)^2 + 6^2 \Rightarrow (k-2)^2 = 100 - 36 = 64$

$k - 2 = \pm 8$

$\therefore\ k = 10 \lor k = -6$

5 Si los vértices opuestos de un cuadrado son (–3; –2) y (4; 3), calcula el área de esta región cuadrangular.

Resolución:



d: diagonal

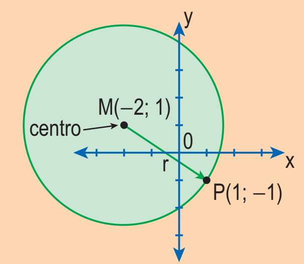
$d = \sqrt{(4-(-3))^2 + (3-(-2))^2}$

$d = \sqrt{49+25}$

$d = \sqrt{74}$

$\therefore$ Área del cuadrado $= \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{\sqrt{74}^2}{2} = 37$

6 Halla el área del círculo:



Resolución:

$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-(-1))^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} \quad \Rightarrow r = \sqrt{13}$

Hallamos el área:

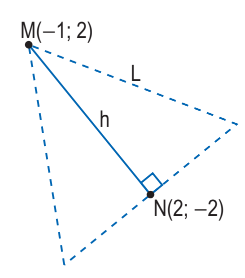
A_C = área del círculo $= \pi r^2 = \pi(\sqrt{13})^2$

$\therefore\ A_C = 13\pi$

7 Los puntos extremos de la altura de un triángulo equilátero son M(–1; 2) y N(2; –2). Calcula el área del triángulo.

Resolución:

Graficamos los puntos dados:



Determinamos h:

$h = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-(-2))^2}$

$h = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25}$

Área del triángulo equilátero en función a su altura:

$S_\triangle = h^2\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore\ S_\triangle = 25\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



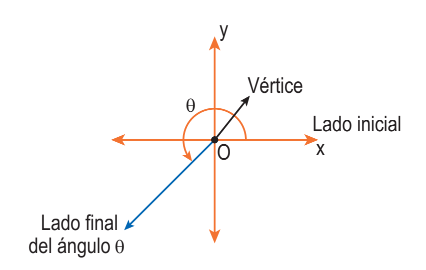
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Es aquel ángulo trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen del sistema cartesiano, su lado inicial coincide con el semieje positivo de abscisas y su lado final se ubica en cualquier región del plano o cuadrante.

Nota

Un ángulo en posición normal es también llamado ángulo en posición canónica o estándar.

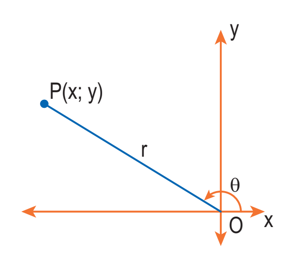


θ: representa un ángulo en posición normal

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Para calcular las razones trigonométricas se necesita un punto perteneciente a su lado final.

Dado el siguiente gráfico, se definen las razones trigonométricas en la tabla mostrada:



Donde:
x: abscisa
y: ordenada
r: radio vector; $r > 0$

$\text{sen}\theta = y/r$	$\csc\theta = r/y$
$\cos\theta = x/r$	$\sec\theta = r/x$
$\tan\theta = y/x$	$\cot\theta = x/y$

Importante

- El radio vector es la distancia de un punto del plano hacia el origen de coordenadas.

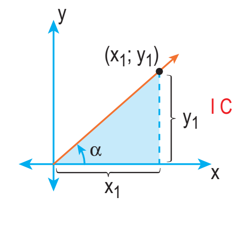
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

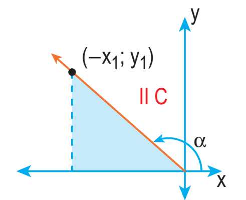
- El lado final, de todo ángulo en posición normal, determina el cuadrante de dicho ángulo.

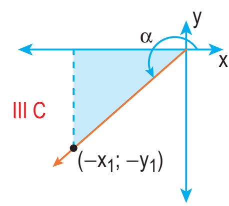


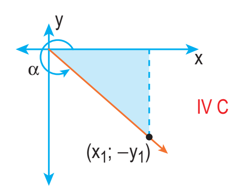
Además, tomando en cuenta los signos que las coordenadas toman en el plano cartesiano podemos deducir los signos de las razones trigonométricas.

Sean $x_1; y_1 > 0$

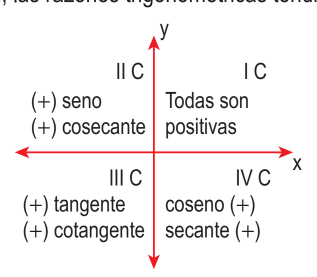






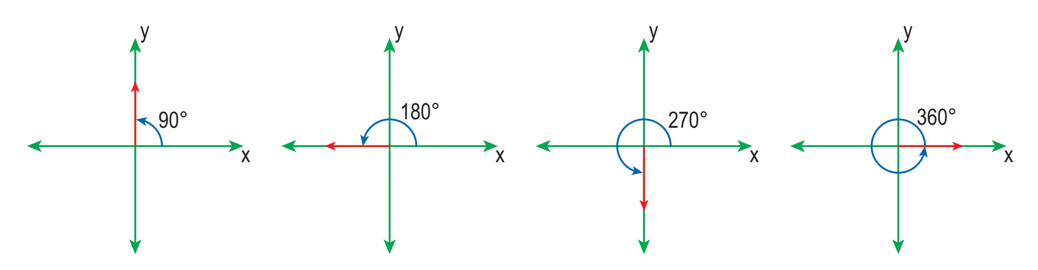


Luego, en cada uno de los cuadrantes, las razones trigonométricas tendrán los siguientes signos:



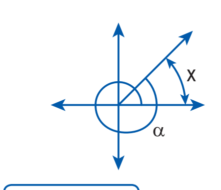
ÁNGULOS CUADRANTALES

Son aquellos ángulos en posición normal, cuyo lado final coincide con cualquiera de los semiejes cartesianos. En el siguiente gráfico mostramos los ángulos cuadrantales:



Nota

Ángulo mayor a una vuelta:



$\boxed{\alpha = 360°n + x}$; $x < 360°$

Donde: n es el n.° de vueltas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

En el siguiente cuadro se presenta el valor de cada una de las razones trigonométricas de los principales ángulos cuadrantales:

m ∢	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	ND	1	ND
90°	1	0	ND	0	ND	1
180°	0	–1	0	ND	–1	ND
270°	–1	0	ND	0	ND	–1
360°	0	1	0	ND	1	ND

ND: no determinado

Importante

Un ángulo cuadrantal no pertenece a cuadrante alguno, además, su medida siempre es múltiplo de 90°.

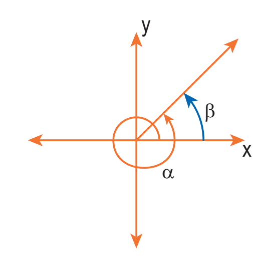
Si: α es un ángulo cuadrantal

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 90°n}, n \in \mathbb{Z}$



ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos, que tienen mismo lado inicial, vértice y lado final.



⇒ Los ángulos α y β son ángulos coterminales.

Los ángulos coterminales cumplen las siguientes propiedades:

a) Dados α y β ángulos coterminales $\Rightarrow \boxed{\alpha - \beta = n(360°)}$; $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

b) Las razones trigonométricas de dos ángulos coterminales son respectivamente iguales. Es decir, siendo α y β ángulos coterminales:

$\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$	$\cos\alpha = \cos\beta$	$\csc\alpha = \csc\beta$
$\tan\alpha = \tan\beta$	$\cot\alpha = \cot\beta$	$\sec\alpha = \sec\beta$

Ejemplo:

Dado el siguiente par de ángulos, determina si son ángulos coterminales.

a) 1380° y 300° y b) 1230° y 260°

Resolución:

a) 1380° y 300°

$1380° - 300° = 1080°$

Calculamos el número de vueltas:

$$\begin{array}{r|l} 1080° & 360° \\ \hline - & 3 \end{array} \Rightarrow 1080° = 3(360°) = 3 \text{ vueltas}$$

división exacta — 1 vuelta

Entonces 1380° y 300° son ángulos coterminales.

b) 1230° y 260°

$1230° - 260° = 970°$

Calculamos el número de vueltas:

$$\begin{array}{r|l} 970° & 360° \\ \hline 250° & 2 \end{array} \Rightarrow 970° = 2(360°) + 250°$$

residuo

Observamos que 970° representa un número inexacto de vueltas, por lo tanto, 1230° y 260° no son coterminales.

Observación

Sean los ángulos 792° y 72°, tenemos:

$792° - 72° = 720° = 2(360°)$

⇒ 792° y 72° son coterminales

Luego, se cumple:

$\text{sen}792° = \text{sen}72°$
$\cos792° = \cos72°$
$\tan792° = \tan72°$
$\cot792° = \cot72°$
$\sec792° = \sec72°$
$\csc792° = \csc72°$



Problemas resueltos

1 ¿A qué cuadrante pertenecen los ángulos 2595° y 3840°? Grafica.

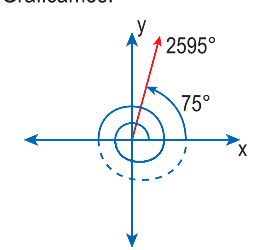
Resolución:

Dividimos cada ángulo por 360° para determinar el número de vueltas.

2595° | 360°
2520° — 7 (n.º de vueltas)
75° (Indica el cuadrante)

3840° | 360°
3600° — 10 (n.º de vueltas)
240° (Indica el cuadrante)

Graficamos:



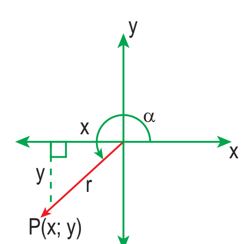
y
240°
x
3840°

$\Rightarrow$ 2595° $\in$ IC. $\Rightarrow$ 3840° $\in$ IIIC.

2 Si: $\text{sen}\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\alpha \in$ IIIC. Calcula $\tan\alpha$.

Resolución:

Graficamos el ángulo "α" en el IIIC:



Sabemos:

$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{2} \wedge r = 2$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (-\sqrt{2})^2 = (2)^2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ($x \in$ IIC)

$\Rightarrow \tan\alpha = y/x$

$\therefore \tan\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$

3 Si: $\alpha \in$ IVC; $\beta \in$ IIC y $\theta \in$ IC; calcula el signo de:
$k = \cos^3\alpha\tan\beta\,\text{sen}^3\theta$

Resolución:

Analizamos cada uno de los ángulos según el cuadrante en donde se encuentran:

- Si: $\alpha \in$ IVC: $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos^3\alpha = (+)$
- Si: $\beta \in$ IIC: $\tan\beta < 0 \Rightarrow \tan\beta = (-)$
- Si: $\theta \in$ IC: $\text{sen}\theta > 0 \Rightarrow \text{sen}^3\theta = (+)$

Reemplazamos los signos en k:

$k = \cos^3\alpha\tan\beta\,\text{sen}^3\theta$

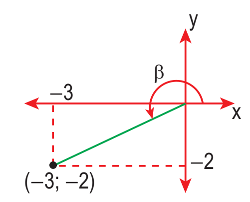
$k = (+) . (-) . (+)$

$k = (-) . (+) = (-)$

$\therefore$ k es negativo.

4 Si $\tan\beta = \frac{2}{3}$ y $\beta \in$ IIIC, calcula:
$Q = \text{sen}\beta - \cos\beta$

Resolución:



$y = -2 \wedge x = -3$ ($\beta \in$ IIIC)

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$

$r = \sqrt{4 + 9}$

$r = \sqrt{13}$

$\therefore Q = \frac{-2}{\sqrt{13}} - \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{13}$

5 Dos ángulos coterminales son entre sí como 2 es a 7. Halla la medida del mayor de dichos ángulos, si el menor se encuentra comprendido entre 200° y 300°.

Resolución:

Sean β y θ los ángulos ($\beta < \theta$).

$\frac{\beta}{\theta} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{\theta}{7} \Rightarrow \begin{matrix}\beta = 2k \\ \theta = 7k\end{matrix}$

Sabemos que en los ángulos coterminales se cumple:

$\theta - \beta = 360°n$

$7k - 2k = 360°n \Rightarrow 5k = 360°n \Rightarrow k = 72°n$

Si:

$n = 1 \Rightarrow k = 72° \Rightarrow \beta = 2(72) = 144°$

$n = 2 \Rightarrow k = 144° \Rightarrow \beta = 2(144) = 288°$

$n = 3 \Rightarrow k = 216° \Rightarrow \beta = 2(216) = 432°$

$\Rightarrow k = 144°$

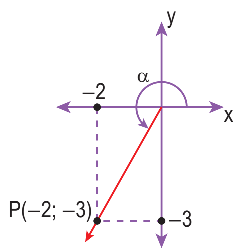
$n = 1 \wedge 3$ se descartan (no están en el rango del valor que puedan tomar).

Por lo tanto, el valor del ángulo mayor es:

$\theta = 7(144°) = 1008°$

6 Sea P(−2; −3) un punto del lado final de un ángulo α en posición normal, halla $\csc\alpha$.

Resolución:



$x = -2$

$y = -3$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$

$r = \sqrt{13}$

$\therefore \csc\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3}$

7 Verifica si los ángulos 130° y 1210° son coterminales.

Resolución:

Si dos ángulos son coterminales, se cumple: $\beta - \alpha = 360°(n)$

Entonces: $1210° - 130° = 360°(n) \Rightarrow 1080° = 360°(n)$

$n = 3 \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ Los ángulos 130° y 1210° son ángulos coterminales.

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Reducir un ángulo al primer cuadrante consiste en relacionar a las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud con las razones trigonométricas de un ángulo agudo (ángulo del primer cuadrante), obteniéndose una equivalencia.
Se presentan los siguientes casos:

Primer caso

Para ángulos positivos menores a una vuelta
Para reducir estos ángulos al primer cuadrante, se les debe descomponer en función al ángulo cuadrantal más cercano.

Primera forma

$$RT(180° \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$$
$$RT(360° - \alpha) = \pm RT(\alpha)$$

Donde:
±: es el signo que tendrá la razón, el cual depende del cuadrante en el que se ubica el ángulo a reducir.

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante las siguientes RT(razones trigonométricas).

1. tan217°.

   Resolución:
   $\tan 217° = \tan(180° + 37°)$
   $= \tan 37°$
   $= 3/4$
   Como 217° ∈ IIIC, entonces la tangente es positiva, su equivalente tan37° también es positivo.

2. sec300°.

   Resolución:
   $\sec 300° = \sec(360° - 60°)$
   $= \sec 60°$
   $= 2$
   Como 300° ∈ IVC, la secante es positiva, entonces su equivalente sec60° también es positivo.

3. cos150°.

   Resolución:
   $\cos 150° = \cos(180° - 30°)$
   $= -\cos 30°$
   $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Como 150° ∈ IIC, su coseno es negativo, entonces su equivalente es –cos30°.

4. cot315°.

   Resolución:
   $\cot 315° = \cot(360° - 45°)$
   $= -\cot 45°$
   $= -1$
   Como 315° ∈ IVC, la cotangente es negativa, entonces su equivalente es –cot45°.

Segunda forma

$$RT(90° \pm \alpha) = \pm CO\text{-}RT(\alpha)$$
$$RT(270° \pm \alpha) = \pm CO\text{-}RT(\alpha)$$

Donde:
±: es el signo que tendrá la razón el cual depende del cuadrante en la que se ubique el ángulo a reducir.

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante las siguientes RT.

1. sen150°.

   Resolución:
   $\text{sen}150° = \text{sen}(90° + 60°)$
   $= \cos 60°$
   $= 1/2$
   Como 150° ∈ IIC, y allí el seno es positivo, entonces su equivalente cos60° también es positivo.

2. csc330°.

   Resolución:
   $\csc 330° = \csc(270° + 60°)$
   $= -\sec 60°$
   $= -2$
   Como 330° ∈ IVC, y allí la cosecante es negativa, entonces su equivalente será –sec60°.

3. sec143°.

   Resolución:
   $\sec 143° = \sec(90° + 53°)$
   $= -\csc 53°$
   $= -5/4$
   Como 143° ∈ IIC, y allí la secante es negativa, entonces su equivalente será negativo –csc53°.

4. tan225°.

   Resolución:
   $\tan 225° = \tan(270° - 45°)$
   $= \cot 45°$
   $= 1$
   Como 225° ∈ IIIC, y allí la tangente es positiva, entonces su equivalente cot45° también es positivo.



Observación

Para determinar si un ángulo pertenece a un cierto cuadrante del plano cartesiano, el primer sumando tiene que ser un ángulo cuadrantal, tales como; 90°; 180°; 270° y 360°.

Observación

Ten en cuenta que si $\alpha < 90°$:

- $180° - \alpha \in$ IIC
- $180° + \alpha \in$ IIIC
- $360° - \alpha \in$ IVC



Recuerda

Co-razón(senα) = cosα
Co-razón(tanα) = cotα
Co-razón(secα) = cscα

> **Observación**
>
> Nota que:
> α se considera un ángulo agudo, entonces:
> - $90° + \alpha \in$ IIC
> - $270° - \alpha \in$ IIIC
> - $270° + \alpha \in$ IVC



Segundo caso

Para ángulos positivos mayores a una vuelta

Para reducir estos ángulos al primer cuadrante, se le debe descomponer en función al número de vueltas que contenga este ángulo.

$$RT(n \times 360° + \alpha) = RT(\alpha)$$ n: número de vueltas.

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante.

1. tan750°.

   Resolución:
   $\tan750° = \tan(2 \times 360° + 30°)$
   $= \tan30°$
   $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

   Se observa que 750° contiene 2 veces la medida del ángulo de 1 vuelta (360°), luego se trabaja con el ángulo de 30°.

2. sec1485°.

   Resolución:
   $\sec1485° = \sec(4 \times 360° + 45°)$
   $= \sec45°$
   $= \sqrt{2}$

   Se observa que 1485° contiene 4 veces la medida del ángulo de 1 vuelta (360°), luego se trabaja con el ángulo de 45°.

3. cos1117°.

   Resolución:
   $\cos1117° = \cos(3 \times 360° + 37°)$
   $= \cos37°$
   $= 4/5$

   Se observa que 1117° contiene 3 veces la medida del ángulo de 1 vuelta (360°), luego se trabaja con el ángulo de 37°.

4. cot1830°.

   Resolución:
   $\cot1830° = \cot(5 \times 360° + 30°)$
   $= \cot30°$
   $= \sqrt{3}$

   Se observa que 1830° contiene 5 veces la medida del ángulo de 1 vuelta (360°), luego se trabaja con el ángulo de 30°.

> **Importante**
>
> Debemos familiarizarnos con los múltiplos de 360°, a menudo trabajaremos con estos valores.
> $n \times 360°$: múltiplos de 360°
> $\overset{\circ}{360} = \{360°; 720°; 1080°; 1440°; ...\}$





Tercer caso

Para ángulos negativos

Las funciones coseno y secante cuyos ángulos son negativos, van a ser igual a los ángulos positivos; en las demás razones trigonométricas el signo sale fuera del ángulo y afecta a toda la razón trigonométrica.

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \\ \sec(-\alpha) &= \sec\alpha \\ \csc(-\alpha) &= -\csc\alpha \end{aligned}$$

Ejemplos:
Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas.

1. $\cos(-45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\tan(-30°) = -\tan30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $\sec(-127°) = \sec127°$
   $= \sec(90° + 37°)$
   $= -\csc37°$
   $= -5/3$

4. $\text{sen}(-150°) = -\text{sen}150°$
   $= -\text{sen}(180° - 30°)$
   $= -\text{sen}30°$
   $= -1/2$

> **Importante**
>
> Ten en cuenta que las razones coseno y secante son las **únicas** donde el signo se puede obviar, para las demás razones trigonométricas el signo se coloca delante de la razón trigonométrica.

Problemas resueltos

1 Reduce al primer cuadrante sen323°.

Resolución:

$\text{sen}323° = \text{sen}(360° - 37°);\ 323° \in \text{IVC}\ (-)$
$= -\text{sen}37°$
$= -3/5$

2 Reduce al primer cuadrante tan150°.

Resolución:

$\tan150° = \tan(180° - 30°);\ 150° \in \text{IIC}\ (-)$
$= -\tan30°$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 Reduce al primer cuadrante csc225°.

Resolución:

$\csc225° = \csc(180° + 45°);\ 225° \in \text{IIIC}\ (-)$
$= -\csc45°$
$= -\sqrt{2}$

4 Reduce al primer cuadrante cos300°.

Resolución:

$\cos300° = \cos(360° - 60°);\ 300° \in \text{IVC}\ (+)$
$= \cos60°$
$= 1/2$

5 Reduce al primer cuadrante sen143°.

Resolución:

$\text{sen}143° = \text{sen}(90° + 53°);\ 143° \in \text{IIC}\ (+)$
$= \cos53°$
$= 3/5$

6 Calcula el valor de cot(–30°).

Resolución:

$\cot(-30°) = -\cot30°$
$= -\sqrt{3}$

7 Calcula el valor de cos(–135°).

Resolución:

$\cos(-135°) = \cos135° = \cos(90° + 45°);\ 135° \in \text{IIC}\ (-)$

$\therefore \cos(-135°) = -\text{sen}(45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8 Calcula el valor de csc(–53°).

Resolución:

$\csc(-53°) = -\csc53°$
$\therefore \csc(-53°) = -5/4$

9 Reduce al primer cuadrante tan1575°.

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 1575° & 360° \\ \hline \underline{1440°} & 4 \\ 135° & \end{array}$$

$\tan1575° = \tan135°$
$= \tan(180 - 45°);\ 135° \in \text{IIC}(-)$
$= -\tan45° = -1$
$\therefore \tan1575° = -1$

10 Reduce al primer cuadrante sec2017°.

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 2017° & 360° \\ \hline \underline{1800°} & 5 \\ 217° & \end{array}$$

$\sec2017° = \sec217°$
$= \sec(180° + 37°)$
$= -\sec37°$
$\therefore \sec2017° = -5/4$

11 Reduce al primer cuadrante cos2850°.

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 2850° & 360° \\ \hline \underline{2520°} & 7 \\ 330° & \end{array}$$

$\cos2850° = \cos330°;\ 330° \in \text{IVC}\ (+)$
$= \cos(360° - 30°)$
$= \cos30°$

$\therefore \cos2850° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12 Calcula:
$M = \tan(-53°) - \cos(-30°) + \csc(-45°)$

Resolución:

$M = -\tan53° - \cos30° - \csc45°$

$M = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$

$\therefore M = \dfrac{-8 - 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{6}$

13 Convierte a su equivalente la siguiente expresión:
$\text{sen}(90° - x) + \cos(180° - y)$

Resolución:

$\text{sen}(90° - x) = \cos x$
$\cos(180° - y) = -\cos y$
$\therefore \text{sen}(90° - x) + \cos(180° - y) = \cos x - \cos y$

14 Si x es un ángulo agudo, halla el valor de:
$M = \text{sen}^2(90° + x) + \cos^2(270° - x)$

Resolución:

$\text{sen}(90° + x) = \cos x$
$\cos(270° - x) = -\text{sen}x$
Luego:
$M = (\cos x)^2 + (-\text{sen}x)^2 = \cos^2x + \text{sen}^2x = 1$
$\therefore M = 1$

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL



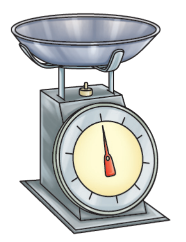
Importante

La notación científica nos permite expresar de forma sencilla cantidades numéricas demasiadas grandes o demasiadas pequeñas.

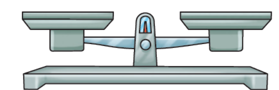
Ejemplo:
$0,0033 = 3,3 \times 10^{-3}$
$900\,000\,000 = 9 \times 10^{8}$

Nota

Algunos instrumentos de medición de masa son:



Balanza de cocina



Balanza de Roberval



Atención

Observa las siguientes equivalencias:

1 kilogramo = 10 hg
1 kilogramo = 100 dag
1 kilogramo = 1000 g
1 tonelada = 1000 kg
1 quintal = 100 kg
1 miriagramo = 10 kg

Nota

Para realizar la conversión de una unidad a otra situada a la izquierda de la unidad dada, se debe dividir entre tantos ceros como posiciones hay entre las dos unidades.

DEFINICIÓN

El sistema métrico decimal es el sistema de medida universalmente aceptado, cuyas unidades están relacionadas mediante potencias de 10.

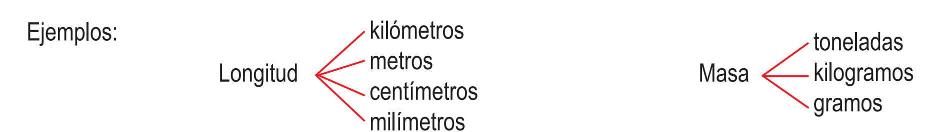
MAGNITUD

Una magnitud es todo aquello que se puede medir. Las magnitudes más conocidas son:

- La longitud
- La temperatura
- La superficie
- La masa
- El volumen
- El tiempo

A su vez, las magnitudes se expresan en unidades de medida.

Ejemplos:



Para poder trabajar en el sistema métrico decimal debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:

1. Para multiplicar un número decimal por 10; 100; 1000; ... ; se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad.

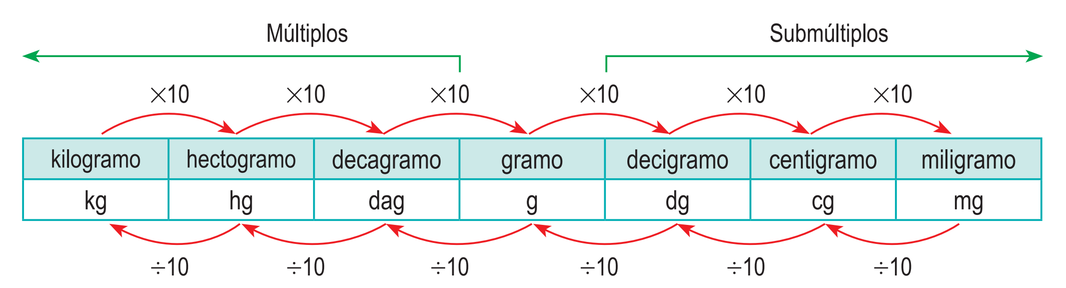
   Ejemplos:
   - $0,32 \times 10^2 = 32$
   - $1,27 \times 10 = 12,7$

2. Para dividir un número decimal entre 10; 100; 1000; ... ; se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad.

   Ejemplos:
   - $1,54 \div 10 = 0,154$
   - $0,028 \div 10^3 = 0,000028$

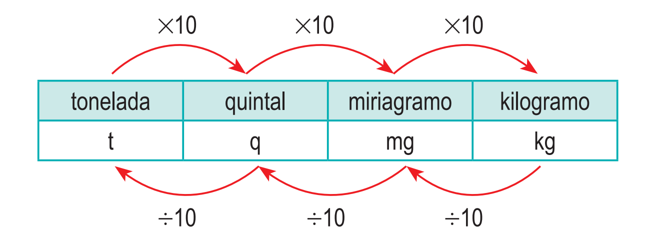
UNIDADES DE MASA

Las unidades de masa (peso) se emplean para calcular la cantidad de materia de un cuerpo.
El kilogramo (kg) es la principal unidad de masa en el Sistema Internacional de unidades, aunque la más usada sea el gramo (g). En el siguiente cuadro se muestran los principales múltiplos y submúltiplos del gramo.



kilogramo	hectogramo	decagramo	gramo	decigramo	centigramo	miligramo
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Observa que: $1\text{ kg} = 10^3\text{ g}$; $1\text{ hg} = 10^2\text{ g}$; $1\text{ dag} = 10\text{ g}$; $1\text{d g} = 10^{-1}\text{ g}$; $1\text{ cg} = 10^{-2}\text{ g}$; $1\text{ mg} = 10^{-3}\text{ g}$
Además, debemos tener en cuenta los siguientes múltiplos del kilogramo (kg).



tonelada	quintal	miriagramo	kilogramo
t	q	mg	kg

Ejemplos:

a) ¿A cuántos gramos equivalen 20 hectogramos?

Resolución:
Notamos en el cuadro que los gramos se encuentran a la derecha de hectogramos, por lo tanto debemos multiplicar; siguiendo las flechas tenemos:

20 hectogramos = 20×10^2 g = 2000 g

$\Rightarrow$ 20 hectogramos = 2000 g

b) ¿A cuántos hectogramos equivalen 3000 dg?

Resolución:
Los hectogramos se encuentran a la izquierda de los decigramos, es decir, debemos dividir; luego:

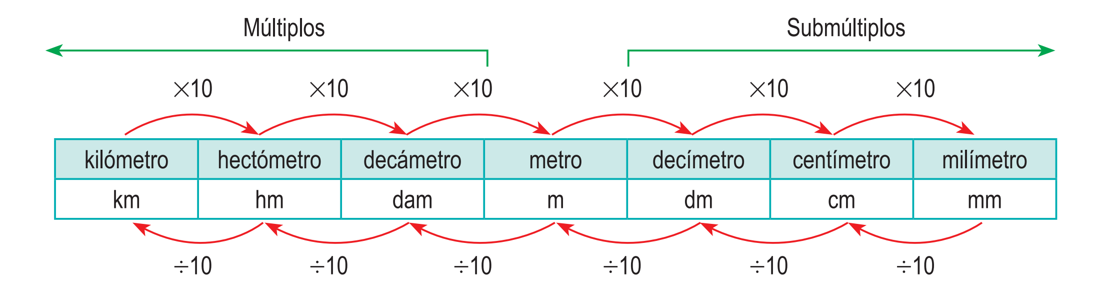
300 dg = $300 \div 10^3$ hg = 300×10^{-3} hg = 0,3 hg

$\Rightarrow$ 300 dg = 0,3 hg

UNIDADES DE LONGITUD

Las unidades de longitud son utilizadas para medir distancias entre dos puntos dados. El metro (m) es la unidad fundamental de la longitud en el Sistema Internacional de unidades.

En el siguiente cuadro se muestran los principales múltiplos y submúltiplos del metro.



kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Ejemplos:

a) Realiza la conversión de 8 hm a centímetros.

Resolución:
Del cuadro, vemos que cm se encuentra a la derecha de hm, es decir la operación a realizar es la multiplicación, luego:

8 hm = 8×10^4 cm = 80 000 cm

$\Rightarrow$ 8 hm = 80 000 cm

b) ¿A cuántos decámetros equivalen 25 milímetros?

Resolución:
Del cuadro anterior, el decámetro está a la izquierda del milímetro, luego la operación a utilizar es la división, tenemos:

25 mm = $25 \div 10^{-4}$ dam = 25×10^{-4} dam
= 0,0025 dam

$\Rightarrow$ 25 mm = 0,0025 dam

UNIDADES DE VOLUMEN

Las unidades de volumen son utilizadas para conocer la cantidad de líquido, que hay en un recipiente o depósito.

El litro (l) es la unidad de volumen en el sistema internacional de unidades.

En el siguiente cuadro se muestran los múltiplos y submúltiplos más utilizados del litro (l).

Múltiplos — Submúltiplos

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

Ejemplo:

a) ¿A cuántos decalitros equivalen 21,6 centilitros?

Resolución:
Observamos el cuadro y realizamos la conversión correspondiente:

21,6 cl = $21,6 \div 10^3$ dal = $21,6 \times 10^{-3}$ dal = 0,0216 dal

$\Rightarrow$ 21,6 cl = 0,0216 dal



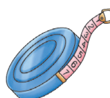
Atención

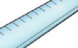
Observa las siguientes equivalencias:

1 metro = 10 dm
1 metro = 100 cm
1 metro = 1000 mm
1 decámetro = 10 m
1 hectómetro = 100 m
1 kilómetro = 1000 m

Nota

Algunos instrumentos de medida de longitud:


Cinta métrica


Regla


Flexómetro


Atención

Estas son las equivalencias más utilizadas:

1 litro = 10 dl
1 litro = 100 cl
1 litro = 1000 ml
1 decalitro = 10 l
1 hectolitro = 100 l
1 kilolitro = 1000 l

Nota

Debes tener en cuenta lo siguiente:



1 litro = 2 medios litros (también son 4 vasos)

1 litro = 2 medios litros (son 4 vasos)

Problemas resueltos

1 ¿A cuántos hectogramos equivalen 142×10^5 decigramos?

Resolución:

Según la tabla de conversiones dada, analizamos las equivalencias:

$1\ dg = 10^{-1}\ g = 10^{-1}(10^{-1}\ dag)$

$= 10^{-1} \times 10^{-1}(10^{-1}\ hg)$

$\Rightarrow 1\ dg = 10^{-3}\ hg$

Luego, aplicamos una regla de tres simple para realizar la conversión:

$1\ dg \longrightarrow 10^{-3}\ hg$

$142 \times 10^5\ dg \longrightarrow x$

$$\Rightarrow x = \frac{(142 \times 10^5\ dg)(10^{-3}\ hg)}{1\ dg}$$

$x = 142 \times 10^5 \times 10^{-3}\ hg$

$x = 142 \times 10^2\ hg$

2 ¿A cuántos centigramos equivalen 2,5 decagramos?

Resolución:

Observamos la tabla y tenemos:

$1\ dag = 10\ g = 10(10\ dg) = 10 \times 10 \times 10\ cg = 10^3\ cg$

$1\ dag = 10^3\ cg$

Hallamos la equivalencia:

$1\ dag \longrightarrow 10^3\ cg$

$2,5\ dag \longrightarrow x$

$$\Rightarrow x = \frac{2,5\ dag \times 10^3\ cg}{1\ dag}$$

$x = 2,5 \times 10^3\ cg$

$x = 2500\ cg$

3 Realiza la conversión de 0,089 dam a milímetros.

Resolución:

Analizamos las equivalencias:

$1\ dam = 10\ m = 10(10\ dm) = 10 \times 10(10\ cm)$

$= 10 \times 10 \times 10\ (10\ mm)$

$1\ dam = 10^4\ mm$

Luego:

$1\ dam \longrightarrow 10^4\ mm$

$0,089\ dam \longrightarrow x$

$$\Rightarrow x = \frac{0,089\ dam \times 10^4\ mm}{1\ dam}$$

$x = 890\ mm$

4 Convierte 10 706 cm a decámetros.

Resolución:

De las equivalencias tenemos:

$1\ cm = 10^{-1}\ dm = 10^{-1}(10^{-1}\ m)$

$= 10^{-1} \times 10^{-1}(10^{-1}\ dam)$

$\Rightarrow 1\ cm = 10^{-3}\ dam$

Entonces, tenemos:

$1\ cm \longrightarrow 10^{-3}\ dam$

$10\ 706\ cm \longrightarrow x$

$$\Rightarrow x = \frac{10\ 706\ cm \times 10^{-3}\ dam}{1\ cm}$$

$x = 10,706\ dam$

5 ¿A cuántos decilitros equivalen 233 decalitros?

Resolución:

Tenemos, por equivalencias lo siguiente:

$1\ dal = 10\ l = 10(10\ dl)$

$1\ dal = 10^2\ dl$

Luego, aplicamos la regla de tres simple para la resolución:

$1\ dal \longrightarrow 10^2\ dl$

$233\ dal \longrightarrow x$

$$\Rightarrow x = \frac{233\ dal \times 10^2\ dl}{1\ dal}$$

$x = 23\ 300\ dl$

6 ¿Cuánto equivale 12 hectolitros en centilitros?

Resolución:

Analizamos cada una de las equivalencias:

$1\ hl = 10\ dal = 10(10\ l) = 10 \times 10\ (10\ dl)$

$= 10 \times 10 \times 10 \times (10\ cl)$

$\Rightarrow 1\ hl = 10^4\ cl$

Luego:

$1\ hl \longrightarrow 10^4\ cl \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{12\ hl \times 10^4\ cl}{1\ hl}$

$12\ hl \longrightarrow x$

$x = 120\ 000\ cl$

7 Javier tiene 16 botellas de un cuarto de litro, ¿cuántos mililitros tiene en total?

Resolución:

Sabemos que cuatro cuartos de litro equivalen a un litro. Javier tiene 16 botellas de un cuarto de litro, entonces tiene 4 litros en total.

Luego; convertimos 1 l a mililitros:

$1\ l = 10\ dl = 10\ (10\ cl) = 10 \times 10\ (10\ ml)$

$1\ l = 1000\ ml$

Entonces:

$1\ l \longrightarrow 1000\ ml$

$4\ l \longrightarrow x$

$x = \dfrac{4\ l \times 1000\ ml}{1\ l} \Rightarrow x = 4000\ ml$

8 Julio tiene 17 decagramos de arroz y Carmela tiene 312 decigramos de azúcar. Si deciden pesar todo junto, ¿cuántos gramos tendrán en total?

T

Resolución:

Necesitamos convertir todas las unidades en gramos para poder contabilizarlas.

Arroz: 17 dag = 17×10 g = 170 g
Azúcar: 312 dg = $312 \div 10^{-1}$ g = 31,2 g

Luego, el total en gramos es:
170 g + 31,2 g = 201,2 g

9 Si Carlos compra 9 botellas que contienen 250 mililitros de agua, cada una, ¿cuántos litros tiene en total?

Resolución:

Hacemos primero la conversión de mililitros a litros:
250 ml = $250 \div 10^3$ l = 0,25 l

Como Carlos tenía 9 botellas, entonces en total tiene:
0,25 l $\times$ 9 = 2,25 l

Por lo tanto, Carlos tiene 2,25 l en total.

10 Un tanque de agua abastece a 20 departamentos de un edificio. Si diariamente cada departamento consume 6,5 litros, ¿cuántos decalitros debe tener como mínimo el tanque para abastecer a los departamentos por un día?

Resolución:

Realizamos, primero la conversión de litros a decalitros:
6,5 l = $6,5 \div 10$ dal = 0,65 dal

Al día cada departamento consume 0,65 dal, en 20 departamentos se consumirá:
0,65 dal $\times$ 20 = 13 dal

Por lo tanto, el tanque como mínimo deberá tener 13 decalitros.

11 Nélida confecciona toallas para vender. Si en cada toalla utiliza 125 cm y en total confecciona 34 toallas, ¿cuántos metros de tela utiliza en total?

Resolución:

Al confeccionar las toallas utiliza 125 cm, entonces en 34 toallas utilizará:
125 cm $\times$ 34 = 4250 cm

Nos piden calcular el total de tela utilizado, pero en metros; realizamos la conversión:
4250 cm = $4250 \div 10^2$ m = 42,5 m

Luego, en total utiliza 42,5 m.

12 Una panadería produce 675 kg de pan diariamente. ¿A cuántas personas podrá alimentar, si cada persona consume 225 g de pan en un día?

Resolución:

Convertimos los 675 kg a gramos (g):

1 kg ⟶ 1000 g $\Rightarrow x = \dfrac{675 \text{ kg} \times 1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}}$
675 kg ⟶ x

$\Rightarrow$ 675 kg = 675×10^3 g

Aplicamos nuevamente la regla de tres simple:
1 hombre ⟶ 225 g
h hombres ⟶ 675×10^3 g

$$\Rightarrow h = \frac{675 \times 10^3 \text{ g} \times 1 \text{ hombre}}{225 \text{ g}}$$

h = 3000 hombres

$\therefore$ Podrá alimentar a 3000 hombres.

13 Una piscina tiene capacidad de 2000 kl cuando está vacía. ¿Cuántas cisternas serán necesarias para poder llenar el 75% de la piscina si cada cisterna posee una capacidad de 125 l?

Resolución:

Hallamos el 75% de la capacidad de la piscina.

$75\%2000 \text{ kl} = \dfrac{75}{100} \,.\, 2000 \text{ kl}$

Volumen a llenar: 1500 kl

Hallamos la cantidad de litros necesarios para llenar el 75% de la piscina:
1 kl ⟶ 10^3 l
1500 kl ⟶ x

$$\Rightarrow x = \frac{1500 \text{ kl} \times 10^3 \text{ l}}{1 \text{ kl}}$$

$x = 15 \times 10^5$ l

Calculamos el n.° de cisternas necesarias:
1 cisterna ⟶ 125 l
k cisternas ⟶ 15×10^5 l

$$k = \frac{15 \times 10^5 \text{ l} \times 1 \text{ cisterna}}{125 \text{ l}} = 120 \times 10^2 \text{ cisternas}$$

$\therefore$ Son necesarias 12 000 cisternas.

14 Un auto recorre 90 km utilizando 20 l de petróleo. Si necesita realizar un recorrido de 9×10^5m, ¿cuánto dinero (en S/.) necesitará, si 1 dal de petróleo cuesta S/. 30?

Resolución:

Pasamos 90 km a metros: 90 km = $90 \,.\, 10^3$ m
Hallamos cuántos decalitros (dal) se necesitan para recorrer 9×10^5 m:

90×10^3 m ⟶ 20 l
9×10^5 m ⟶ x

$$\Rightarrow x = \frac{9 \times 10^5 \text{ m} \times 20 \text{ l}}{90 \times 10^3 \text{ m}}$$

x = 200 l = 20 dal

Luego:
1 dal ⟶ S/.30
20 dal ⟶ x

$\Rightarrow x = \dfrac{20 \text{ dal} \times \text{S/.}30}{1 \text{ dal}}$ $\therefore$ x = S/.600

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344